情報数学 II 期末テスト　01/26 2001 (4 限)

以下の問いの解答を解答用紙に書け。試験中、教科書およびノートを見ても構わない。

[1]　$F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$, $G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$ ($\mathcal{L}$ はラプラス変換) とするとき、次の関数のラプラス変換を、$F(s)$, $G(s)$ を使って表せ。

(1)　$4f(x) - \dfrac{5}{3}g(x)$　　(2)　$2f\left(\dfrac{x}{2}\right) - e^{3x}g(x)$　　(3)　$\{xf(x)\}' + xg'(x)$

..... 正解例 .....

(1)

$$\mathcal{L}\left[4f(x) - \frac{5}{3}g(x)\right](s) = 4\mathcal{L}[f(x)](s) - \frac{5}{3}\mathcal{L}[g(x)](s) = 4F(s) - \frac{5}{3}G(s)$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[2f\left(\frac{x}{2}\right) - e^{3x}g(x)\right](s) \\
&= 2\mathcal{L}\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right](s) - \mathcal{L}[e^{3x}g(x)](s) \\
&= 2 \cdot 2\mathcal{L}[f(x)](2s) - \mathcal{L}[g(x)](s-3) \qquad \left(\mathcal{L}[f(ax)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(x)]\left(\frac{s}{a}\right)\right) \\
&= 4F(2s) - G(s-3)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[\{xf(x)\}' + xg'(x)](s) \\
&= \mathcal{L}[\{xf(x)\}'] + \mathcal{L}[xg'(x)](s) \\
&= s\mathcal{L}[xf(x)](s) - (xf(x))(0) - \frac{d}{ds}\mathcal{L}[g'(x)](s) \\
&\qquad \left(\mathcal{L}[h'(x)](s) = s\mathcal{L}[h(x)](s) - h(0), \quad \mathcal{L}[xh(x)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[h(x)](s)\right) \\
&= -s\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(x)](s) - \frac{d}{ds}\{s\mathcal{L}[g(x)](s) - g(0)\} \\
&= -sF'(s) - (sG(s))' = -sF'(s) - G'(s) - sG(s)
\end{aligned}$$

.....

[2]　周期 2π の 2 つの関数

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (-\pi < x < 0), \\ -2 & (0 < x < \pi), \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x + 2\pi & (-\pi < x < 0), \\ -2x + 2\pi & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

に対して次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。

(2)　$g'(x) = f(x)$ であることを利用して、$g(x)$ のフーリエ級数を求めよ。

..... 正解例 .....

(1) $f(x)$ は奇関数なので $a_n = 0$ (注: 普通に計算する場合は、$n \geq 1$ と $n = 0$ の場合分けをする必要がある)

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n \geq 1) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-2)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-2\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[2\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{-\cos 0}{n} - \frac{-\cos(-n\pi)}{n}\right\} + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos 0}{n}\right\} \\
&= -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} \quad (\cos 0 = 1,\ \cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n) \\
&= \begin{cases} -\dfrac{8}{n\pi} & (n:\ \text{奇数}) \\ 0 & (n:\ \text{偶数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx = -\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

(2) $g(x)$ は連続で、$g'(x) = f(x)$ も区分的に連続、よって

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

とすると

$$g'(x) = f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx + nb_n\cos nx)$$

となり、よって (1) より $nb_n = 0$ $(n \geq 1)$ となり $b_n = 0$ となる。また、

$$-na_n = \begin{cases} -\dfrac{8}{n\pi} & (n:\ \text{奇数}) \\ 0 & (n:\ \text{偶数}) \end{cases} \quad \text{より} \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^2\pi} & (n:\ \text{奇数}) \\ 0 & (n:\ \text{偶数}) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\pi$$

となるので、よって

$$g(x) \sim \pi + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

.....

[3] フーリエ級数の各点収束性について、例をあげて 説明せよ。

..... 正解例 .....

省略。なお、

- フーリエ級数の各点収束定理 ($f(x)$ が区分的に滑らかならばそのフーリエ級数は $(f(x-0)+f(x+0))/2$ に収束)
- 具体例を用いて、関数が連続な点では $f(x)$ に、不連続な点では、両側からの極限の平均値に収束すること

の 2 つの説明が正しく書けていればほぼ要件を満たす。

.....

[4] 次の問に答えよ。

(1) $\mathcal{L}[u(x)]=U(s)$, $\mathcal{L}[v(x)]=V(s)$ とするとき、$\mathcal{L}[u'+2v]$, $\mathcal{L}[u+2v']$ を U, V, $u(0)$, $v(0)$ を用いて表せ。

(2) 連立微分方程式

$$\begin{cases} u'+2v=0, \\ u+2v'=2x+2, \\ u(0)=0,\ v(0)=-2 \end{cases}$$

を満たす関数 $u(x)$, $v(x)$ を求めよ。

..... 正解例 .....

(1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u'+2v] &= \mathcal{L}[u']+2\mathcal{L}[v]=s\mathcal{L}[u]-u(0)+2\mathcal{L}[v] \\ &= sU(s)+2V(s)-u(0), \\ \mathcal{L}[u+2v'] &= \mathcal{L}[u]+2\mathcal{L}[v']=\mathcal{L}[u]+2(s\mathcal{L}[v]-v(0)) \\ &= U(s)+2sV(s)-2v(0) \end{aligned}$$

(2) 方程式の両辺をラプラス変換し、$u(0)=0$, $v(0)=-2$ を用いると、(1) より

$$\begin{cases} sU+2V=0 & (3) \\ U+2sV=\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{2}{s}-4 & (4) \end{cases}$$

となる ($\mathcal{L}[2x+2]=2/s^2+2/s$)。よって $(3)\times s-(4)$ より

$$\begin{aligned} (s^2-1)U &= -\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s}+4=\frac{4s^2-2s-2}{s^2}=\frac{2(2s+1)(s-1)}{s^2} \\ U &= \frac{2(2s+1)(s-1)}{s^2(s^2-1)}=\frac{2(2s+1)}{s^2(s+1)} \\ &= \frac{2}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s+1} \qquad \text{(部分分数分解)} \\ &= \mathcal{L}[2+2x-2e^{-x}] \\ V &= -\frac{s}{2}U=-1-\frac{1}{s}+\frac{s}{s+1}=-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1} \\ &= \mathcal{L}[-1-e^{-x}] \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{cases} u=2+2x-2e^{-x} \\ v=-1-e^{-x} \end{cases}$$

.....