交通流解析における流体モデルと セルオートマトンモデルの比較

平成 15 年 2 月 10 日

情報電子工学科 竹野研究室
宮入 洋介

目 次

1 はじめに **1**

2 流体モデル **1**
2.1 流体モデルとは 1
2.2 3 つの基本量 1
2.3 3 つの基本量の関係 3
2.4 車両の数の保存 5
2.5 速度と密度の関係 6
2.6 交通量と密度の関係 6

3 流体モデルのモデル化 **7**
3.1 停止距離モデル 7
3.2 Lax–Friedrichs の差分法 9

4 セルオートマトンモデル **10**
4.1 セルオートマトンモデルとは 10
4.2 セルオートマトンモデル 184 11
4.3 境界条件 (Boundary Condition) 11

5 セルオートマトンモデルのシミュレーション **14**
5.1 セルオートマトンモデル 184 のシミュレーション 15
5.2 スロースタートモデルのシミュレーション 18
5.3 NS モデルのシミュレーション 20

6 流体モデルとセルオートマトンモデルの比較 **24**
6.1 Lax–Friedrichs の差分法による数値計算 24
6.2 セルオートマトンモデルでのシミュレーション 26
6.3 両モデルの対応の考察 28

7 まとめ **28**

参考文献 **29**

概要

現在、交通流解析に用いられているモデルには、流体モデル、追従モデル、セルオートマトンモデルなどがある。本研究ではその中から、流体モデルとセルオートマトンモデルを取り上げ、その共通点や相違点を考察する。流体モデルとは、交通流に対する理論的取り扱いを、マクロな立場からとらえる流体力学的なものである。それに対しセルオートマトンモデルとは、交通流を車両 1 台 1 台の挙動から解析するものである。本稿ではまず、流体モデルとセルオートマトンモデルの紹介と、簡単な説明をした後、流体モデルとセルオートマトンモデルの比較を行った。比較では、Lax-Friedrichs の差分法によりデータをグラフ化したものと、セルオートマトンモデルのシミュレーション結果の比較を行い、両モデル間で対応がつくところがあるという結果を得ることができた。しかし、逆に対応の確認ができないところもあったので、そんなことも含めながら紹介していく。

1　はじめに

交通問題は、様々な要素を取り込むことによって研究されている。例えば流体モデルでは、西田 [3] の坂、鈴木 [5] の信号、東海林 [6] のカーブなどである。セルオートマトンモデルでも、木原 [4] は事故、速度指定などを取り入れている。しかし、モデル同士の比較というのは、あまり詳しくは行われていない。流体モデルは、式から理論的に導かれ、ある程度信頼できる結果が得られることはわかっているが、セルオートマトンモデルはそうではない。しかし、流体モデルに対応するところが、セルオートマトンモデルにあれば信頼度も上昇すると言える。そこで本稿では、単純なモデルではあるが、流体モデルとセルオートマトンモデルの比較を行い、対応がつくことを証明したい。

第 2 章では、流体モデルについて 3 つの基本量と呼ばれる速度、密度、交通量について述べ、さらに保存則、基本量同士の関係についても述べる。これらが、流体モデルを考える上で基本となる。第 3 章では、流体モデルの例として停止距離モデルを挙げるほか、Lax-Friedrichs の差分法についても説明する。この Lax-Friedrichs の差分法により採取されたデータが、本題であるセルオートマトンモデルとの比較に使用される。第 4 章では、セルオートマトンモデルについて、ルールや境界問題について説明する。第 5 章では、第 4 章で説明したセルオートマトンモデルを使って実際にシミュレーションを行い、車両の挙動などを観察する。例えば、ルールや境界条件、平均密度の変化でどのような挙動の変化が見られるのか、といったようなものを観察する。第 6 章では、Lax-Friedrichs の差分法によって採取したデータをグラフ化し、セルオートマトンモデルとの比較を行う。

2　流体モデル

2.1　流体モデルとは

流体モデルとは、多数の車両の運動、つまり交通の流れを連続した流体のように考え、表現したモデルの 1 つで連続方程式や運動方程式に基づいて解析するものである。流体モデルは 1955 年に M.J.Lighthill と G.B.Whitham によって、またそれとは別に 1956 年に P.I.Richards によって考え出されたものであり [1),2)]、現在では渋滞時の交通流の挙動の解析などに応用されている。

2.2　3 つの基本量

交通流解析を行う上で必要な概念として 3 つの基本量がある。それは、速度 (速度場)、交通量、密度で、これらはお互いに影響し合っている。以下に流体モデルにおける 3 つの基本量の説明をする。

速度 (速度場) 道路上を走行している車両を考える。車両の位置が $x_0(t)$ なら速度は $dx_0(t)/dt$ であり加速度は $d^2x_0(t)/dt^2$ である。各々の車両の位置を $x_i(t)$ で表すと Fig. 2.1 のようになる。

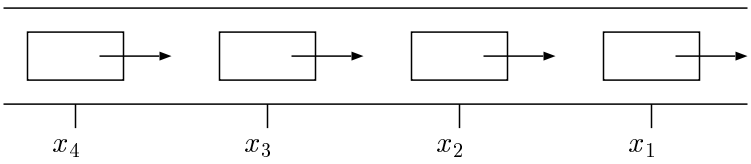


Fig. 2.1 x_i で示された車両の位置

速度を測るのには 2 つの方法がある。最も一般的なのは個々の車両の速度 v_i、すなわち $v_i = dx_i/dt$ を測ることである。しかし、車両の数が N 台の場合には N 個の異なった速度 $v_i(t)(i = 1, 2, \cdots, N)$ が存在する。これでは N の数が大きい場合、各車両の測定が困難になってしまう。そこで、個々の車両の速度を記録する代わりに、空間の各時刻に対して速度場と呼ばれるただ 1 つの速度 $v(x, t)$ を対応させて考える、というのがもう 1 つの方法である。これは、位置 x にいる観測者によって時刻 t で測られた速度である。つまり、車両の位置 $x_i(t)$ における速度場 $v(x, t)$ はつねに $v_i(t)$ となる。

$$v(x_i(t), t) = v_i(t) \tag{2.1}$$

交通量 ある位置で観測者が与えられた時間内に通過する車両の数の測定を行うとする。例えば、観測者は 1 時間当りの車両の通過台数を計算できる。この量は、交通量 q と呼ばれ、交通量は時刻 t や位置 x に依存するので $q(x, t)$ と表すことができる。表にすると以下のようになる。

時刻	通過した車両の数	1 時間当りの通過する車両の数
8:00–8:15	253	1012
8:15–8:30	282	1128
8:30–8:45	263	1052
8:45–9:00	244	976
9:00–9:15	204	816
9:15–9:30	173	692
9:30–9:45	131	524
9:45–10:00	145	580

この場合の 1 時間当りの車両の通過台数は $(1042 + 653)/2 = 847.5$ 台となる。

交通量の測定は、位置を固定するというのが特徴である。

密度 ある時刻で、観測者が与えられた領域 (2 地点間) 内の車両の数の測定を行うとする。例えば、ビルの屋上から道路の写真を撮り、その車両の数を数えることで 1km 当りの車両の数の測定ができる。写真は Fig. 2.2 のようなものを考える。

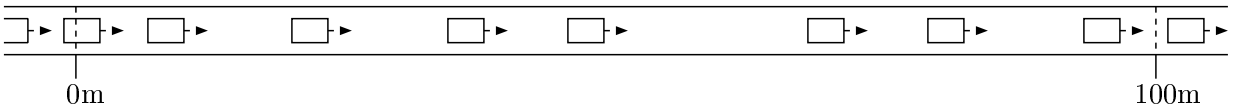


Fig. 2.2 写真の全体図

領域の両端において入りきらなかった車両に関しては、何か決まった方法で考慮する。例えば、領域に入っている車両の割合を分数で表したり、車両の中心が領域に入った場合にのみ数えるなどの方法で考える。例えば Fig. 2.2 の場合 2 地点間の車両の数は 7.67 台で、 1km 当りの車両の数は 76.67 台となる。この測定から、与えられた長さの道路上にいる車両の数が分かり、それは車の密度 ρ と呼ばれる量に換算される。ρ は $\rho(x,t)$ と表すことができ、Mkm 当りの車両の台数 N は

$$N = \rho M$$

なので ρ は

$$\rho = \frac{N}{M} \tag{2.2}$$

で求めることができ、以下のような表を考えると、

道路上の 2 地点 (単位は km)	存在する車両の数	1km 当りの車両の数	密度 (台数 / km)
0–0.2	10	50	50
0.2–0.4	13	65	65
0.4–0.6	8	40	40
0.6–0.8	6	30	30
0.8–1.0	9	45	45

となり ρ を求めることができる。この場合、実際に 1km の間に存在する車両の数は 46 台である。

また車間距離を d、車両の長さを L とすると ρ は

$$\rho = \frac{1}{L+d} \tag{2.3}$$

と表すことができる。 Fig. 2.3 を参照。

2.3 3 つの基本量の関係

3 つの基本量には密接な関係がある。ある道路で Fig. 2.4 のように全ての車両が定速度 v_0、定密度 ρ_0 で運動している場合、当然車間距離は一定で密度は変化しない。τ 時間

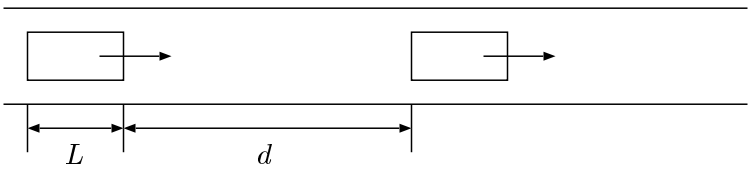


Fig. 2.3 密度の図

で各車両は距離 $v_0\tau$ だけ動くので τ 時間内に観測者の前を通過する車両の数は距離 $v_0\tau$ にいる車両の数に等しい。各車両は一定速度で動いているので、移動距離は速度 $\times$ 時間となる。(Fig. 2.5)

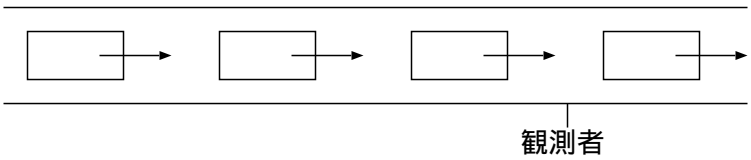


Fig. 2.4 一定な車両の移動

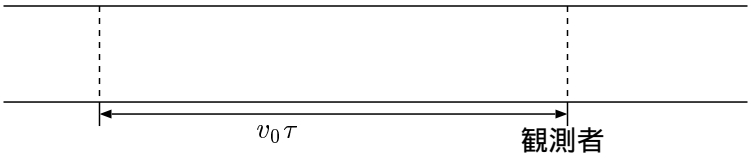


Fig. 2.5 定速 v_0 で移動している車両が τ 時間に進む距離

よって τ 時間内に観測者の前を通過する車両の台数は $\rho_0 v_0 \tau$ である。つまり単位時間当りの交通量 q は

$$q = \rho_0 v_0 \tag{2.4}$$

となる。これは基本法則

交通量 =(交通密度)×(速度場)

を意味する。 3 つの基本量は x と t に依存して $q(x,t)$, $\rho(x,t)$, $v(x,t)$ となるので

$$q(x,t) = \rho(x,t)v(x,t) \tag{2.5}$$

と表すこともできる。

2.4 車両の数の保存

Fig. 2.6 のような道路上の $x = a$ と $x = b$ の間の車両の数 N は、密度の積分で

$$N = \int_a^b \rho(x,t)dx \tag{2.6}$$

となる [1)]。

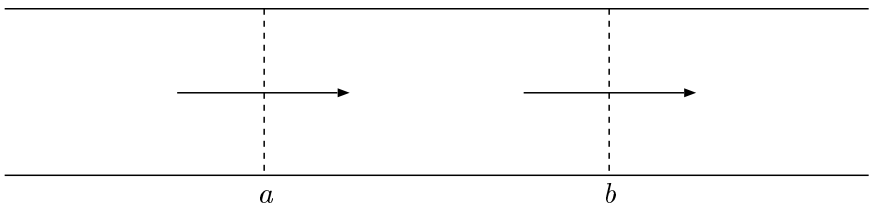


Fig. 2.6 道路上での車両の出入り

区間内で車両の生成 (車線の合流など) や消滅 (車線の分岐など) が起こらなければ、車両の数の変化は $x = a,\ x = b$ を横切る車両の数のみで決まる。各境界を横切る車両の数 (交通量 $q(a,t), q(b,t)$) が時間に関して一定でなければ、この区間内の車両の数の変化率 dN/dt は、単位時間に $x = a$ を横切る車両の数から $x = b$ を横切る車両の数を引いたものに等しい。単位時間当りの車両の数は、交通量 $q(x,t)$ に等しいので

$$\frac{dN}{dt} = q(a,t) - q(b,t) \tag{2.7}$$

となる。そして等式 (2.6), (2.7) より積分保存則と呼ばれる

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = q(a,t) - q(b,t) \tag{2.8}$$

が成り立つ。これは、道路の各点で成り立つ局所的保存則として表現される。道路の区間の端点 $x = a$ と $x = b$ を独立変数と考える。等式 (2.8) は $x = a, x = b$ が時間について固定されているという仮定のもとで得られたので、偏導関数で置き換えなければならなく、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \rho(x,t)dx = q(a,t) - q(b,t)$$

となる。 x を y に、 b は 道路上の任意の位置を示すので b を x にそれぞれ置き換え、両辺を x について偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^x \rho(y,t)dx = \frac{\partial}{\partial x}\{q(a,t) - q(x,t)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}q(x,t)$$

となる。更に式 (2.5) より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{2.9}$$

と書け、車両の保存則は密度と速度場に関する偏微分方程式で表されることを示している。

2.5 速度と密度の関係

速度と密度は方程式 (2.9) で関係付けられている。そして、 Lighthill らが提唱したモデルは、速度が密度にのみ依存するというもので

$$v = v(\rho)$$

と定義される。道路上に他の車両がいなければ、その車両は最高速度

$$v = v_{max}$$

で走ることができる。しかし、密度が増えてくると速度を落とさざるを得なくなり、密度が増えるにしたがって速度は減り続けることになる。こうして

$$\frac{dv}{d\rho} \equiv v'(\rho) \leq 0$$

となる。そして車両は最大密度 ρ_{max} で停止してしまい、

$$v(\rho_{max}) = 0 \tag{2.10}$$

と表せる。速度と密度の関係をグラフに表すと Fig. 2.7 のようになる。

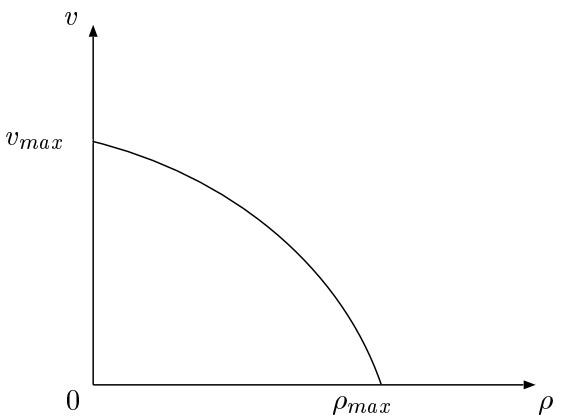


Fig. 2.7 速度と密度の関係

2.6 交通量と密度の関係

交通量は密度 × 速度より

$$q = \rho v(\rho) \tag{2.11}$$

交通量もまた密度にのみ依存しているので、次の 2 つの場合 0 になるという性質を持つ。

- 交通のない場合 $(\rho = 0)$
- 交通が動かない場合 $(v = 0$ つまり $\rho = \rho_{max})$

密度 $(0 < \rho < \rho_{max})$ も含めて、交通量の密度への依存をグラフに表すと Fig. 2.8 のようになる。

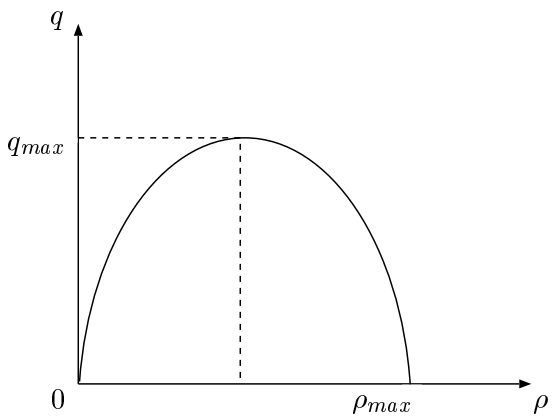


Fig. 2.8 交通量と密度の関係

交通量と密度の関係は、道路交通の基本図式と呼ばれる。これによれば交通量の最大値 q_{max} は、ある密度で起こる。最大交通量 q_{max} は交通容量と呼ばれている。

3 流体モデルのモデル化

3.1 停止距離モデル

過去の研究で使われた停止距離モデル [3),5),6)] についてまとめる。

停止距離とは運転者が急ブレーキを踏み、ブレーキが実際に効き始めるまでの間に車両が走る距離 (空走距離) と、ブレーキが効き始めてから停止するまでに車両が走る距離 (制動距離) とを合わせた距離である。密度は $\rho = 1/(L + d)$ で求められる。車両の長さ L は一定と考え、車間距離 d を停止距離と考える。ここで、運転者がブレーキを踏み、ブレーキが効き始めるまでの時間を t_0、そのときの車両の速度を v_0、制動距離を d_x とすると、空走距離は $v_0 t_0$、停止距離は $v_0 t_0 + d_x$ となる。さらに、制動距離 d_x を求めるために車両が停止するとき、急ブレーキによりタイヤがロックし、それによるタイヤと路面の摩擦による負の加速度によって等加速度直線運動をすると仮定する。

$$v = v_0 + at \tag{3.1}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{3.2}$$

式 (3.1), (3.2) より t を消去し、式 (3.3) が求まる。(v_o : 初速度, v : 速度, a : 加速度, t : 時間, x : 移動距離)

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \tag{3.3}$$

車両の停止運動なので v_0 は走行時の速度、$v = 0$ のとき $x = d_x$ となるので、式 (3.3) より $-v_0^2 = 2ad_x$ となり $d_x = -(v_0^2/2a)$ となる。車間距離 d は停止距離なので

$$d = v_0 t_0 - \frac{v_0^2}{2a} \tag{3.4}$$

となる。

さらに、a を摩擦係数と車両の質量で表して、それを使って v を ρ の式で表すことができる。停止運動なので物体の反作用をふまえ、ニュートンの法則を考えると、

$$F = ma = -\mu mg \tag{3.5}$$

式 (3.5) より式 (3.6) が成り立ち、

$$a = -\mu g \tag{3.6}$$

式 (3.6) と式 (3.4) より式 (3.7) が成り立つ。(F : 物体に働く力, μ : 動摩擦係数, m : 質量, g : 重力, a : 加速度)

$$d = v_0 t_0 + \frac{v_0^2}{2\mu g} \tag{3.7}$$

式 (3.7) に式 (2.3) を代入し、v_0 についての 2 次方程式として解の公式によって解くと、$v_0 > 0$ なので

$$v_0 = -\mu g t_0 + \sqrt{\mu^2 g^2 t_0^2 + 2\mu g(\frac{1}{\rho} - L)} \tag{3.8}$$

となる。

また、坂道の場合を考える。ニュートンの運動方程式より

$$ma = -F - mg\sin\theta \tag{3.9}$$

$$F = \mu N = \mu g\cos\theta \tag{3.10}$$

式 (3.9) と式 (3.10) より

$$a = -g(\mu\cos\theta + \sin\theta) \tag{3.11}$$

式 (3.4) に (3.11) を代入すると

$$d = v_0 t_0 + \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos\theta + \sin\theta)} \tag{3.12}$$

となる。式 (3.12) に式 (2.3) を代入し、解の公式によって解くと、

$$v(\rho,\theta) = - g(\mu\cos\theta+\sin\theta)t_0 + \sqrt{g^2(\mu\cos\theta+\sin\theta)^2t_0^2+2g(\mu\cos\theta+\sin\theta)(\frac{1}{\rho}-L)} \tag{3.13}$$

が得られ、 $\theta=\alpha$ とすると保存則方程式 (2.9) は

$$\rho_t + q(\rho,\alpha)_x = 0 \tag{3.14}$$

$$q(\rho,\alpha) = \rho v(\rho,\alpha) \tag{3.15}$$

となり、道の形状を考慮した交通流モデルを得ることもできる。

3.2 Lax–Friedrichs の差分法

$\Delta x, \Delta t$ を細かく設定し、値の平均から近似を求める方法を差分法と呼ぶ。ここでは Lax–Friedrichs の差分法について説明する。

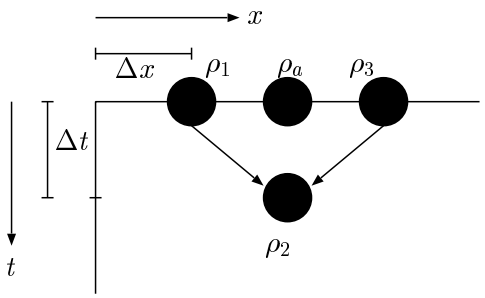


Fig. 3.1 Lax–Friedrichs の差分法

ρ_2 の値は、ρ_1 と ρ_3 の値によって求めることができる (Fig. 3.1 参照)。そこで、Lax–Friedrichs の差分法を用いると、式 (2.9) の保存則方程式を

$$\frac{\rho_2-\rho_a}{\Delta t} + \frac{q(\rho_3,x+\Delta x)-q(\rho_1,x-\Delta x)}{2\Delta x} = 0 \tag{3.16}$$

のように考えることができる。また、ρ_a は、

$$\rho_a = \frac{\rho_3+\rho_1}{2} \tag{3.17}$$

で求めることができ、式 (3.17) を式 (3.16) に代入すると、

$$\frac{\rho_2-\frac{\rho_3+\rho_1}{2}}{\Delta t} + \frac{q(\rho_3,x+\Delta x)-q(\rho_1,x-\Delta x)}{2\Delta x} = 0$$

となる。ρ_2 を求めたいので、

$$\rho_2 = \frac{\rho_3 + \rho_1}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(q(\rho_3, x + \Delta x) - q(\rho_1, x - \Delta x))$$

として、さらに Fig. 3.1 より、

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \Delta t) &= \frac{\rho(x + \Delta x, t) + \rho(x - \Delta x, t)}{2} \\ &- \frac{\Delta t}{2\Delta x}\{q(\rho(x + \Delta x, t), x + \Delta x) - q(\rho(x - \Delta x, t), x - \Delta x)\} \quad (3.18) \end{aligned}$$

という差分式が得られる。

次に、Fig. 3.2 のように ρ_0 における境界問題について考える。

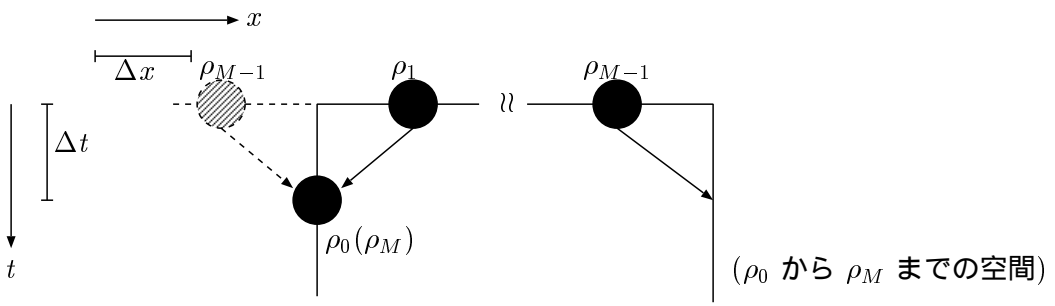


Fig. 3.2 ρ_0 における境界問題

ρ_0 の境界部分では ρ_0 の値は、ρ_1 と ρ_{-1} から求めなければならない。そこで、この ρ_{-1} を ρ_{M-1} とすることによって、ρ_0 の値を求めることができる。つまり、この空間を輪のように考え、$\rho_0 = \rho_M$ と考えることで境界問題に対処している。

また、Lax–Friedrichs の差分法には、安定性条件である CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 条件というものがある。CFL 条件とは

$$|q\prime(\rho, x)|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.19)$$

というもので、$q\prime(\rho, x)$ は q_{max}/ρ_z と $q_{max}/(\rho_{max} - \rho_z)$ の大きいほうということで求められる (ρ_z は q_{max} 時の ρ の値)。式 (3.19) を満たすような $\Delta x, \Delta t$ を設定すれば安定した解が得られる。

4 セルオートマトンモデル

4.1 セルオートマトンモデルとは

セルオートマトンモデルとは、道路を 1 つ 1 つのセルに分けてセルごとに車両の有無を決め、時間発展ルール (設定されたルールにのっとり、時間が更新されると状態が変移するのだが、そのためのルール) のもとにその後の変化を考え交通流の解析を行う交通流

モデルの 1 つである。時間発展ルールを設定することによっていろいろなモデルを造りだすことができる。その中でルール 184 というものがある。これは、多くのセルオートマトンモデルを用いた交通流の研究に使われている。ルール 184 は、S.Wolfram が “ セルオートマトンモデル 184 ” としたものである。以下にルール 184 について述べていく。

4.2 セルオートマトンモデル 184

セルオートマトンモデル 184 の意味について詳しく説明していく。時間発展ルールは

- 1 つのセルに位置できる車両は最大 1 台とする。
- 進行方向は x 軸の正方向にとり、 1 回の時間更新で最大 1 セル分だけ前進できる。
- 1 つ前のセルに車両がいれば、次の時間更新時には前進できない。
- 1 つ前のセルに車両がいなければ、次の時間更新時には前進できる。

で、このルールのもとに全てのセルで同時に時間更新が行われる。これを繰り返していくことで交通の流れを解析できる。

この時間発展ルールに従い、3 つのセルを使って考えてみる。初期状態を t_0、1 回時間更新された状態を t_1、セルに車両がいる状態を 1、セルに車両がいない状態を 0 と考え、3 つのセルだけを使って 8 つのパターンで Fig. 4.1 のように考えてみる。

そして、更にこれを真理値表にして考えてみると

左のセル	真中のセル	右のセル	t_1 時の真中のセル
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

となるので、真理値表の t_1 時の真ん中のセルを 10111000 と並び換えて 2 進数と考えてみる。すると、 128+32+16+8=184 となり、これがセルオートマトンモデル 184 のルール 184 の意味となる。

4.3 境界条件 (Boundary Condition)

時間を更新していく上で 1 つ問題点がある。セルの両端における境界条件である。右端のセル上の車両は、その右のセルに車両がいるかいないかが分からないので移動の判断

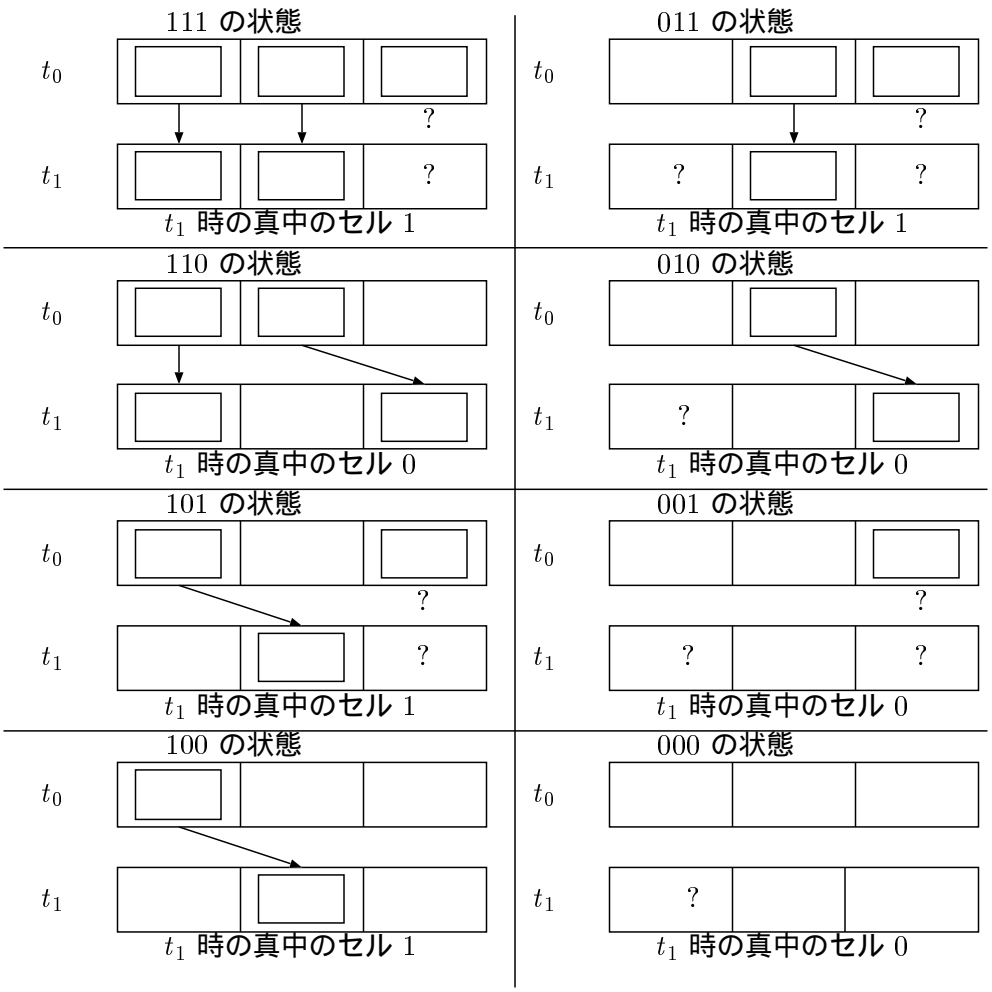


Fig. 4.1 3 つのセルの状態遷移図

ができない。また左端のセルは、それより左に車両がいるかいないか分からないので、仮に車両がいないとするとそのセルに車両が入ることはなくなり左端のセルから順に右のセルに向かって空いていってしまう。また仮に車両がいたとしても何処にいていつセル空間の中に入って来るのかが分からないので、どうしようもなくなる。そこで、この問題を解決するための境界条件というものが、いくつかあるので紹介する。

島状の境界条件 この境界条件の特徴は、セル空間の外のことは全く考えず外にセルはないものとし、有限のセル空間でシミュレーションを行い特別な処理はしないということである。図で表すと Fig. 4.2 のようになる。(セル数 n のセル空間と考える)

Fig. 4.2 を見て分かるように右端に到達した車両は、次の時間更新でセルの外へ出て行き、左端から車両は入って来ない。

周期境界条件 この境界条件の特徴は、セル空間の両端が接続されていると考えることで

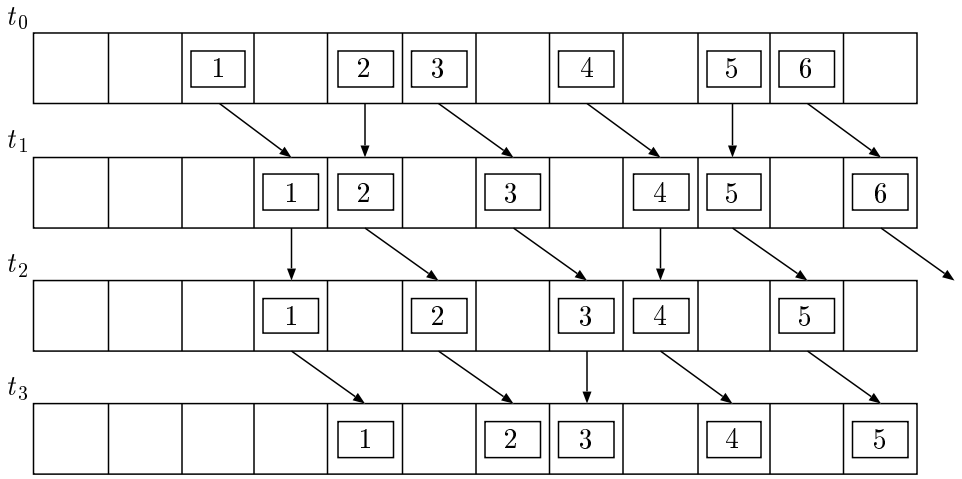


Fig. 4.2 島状の境界条件の状態遷移図

ある。 Fig. 4.3 のようにセル空間を輪のように考えると理解しやすい。

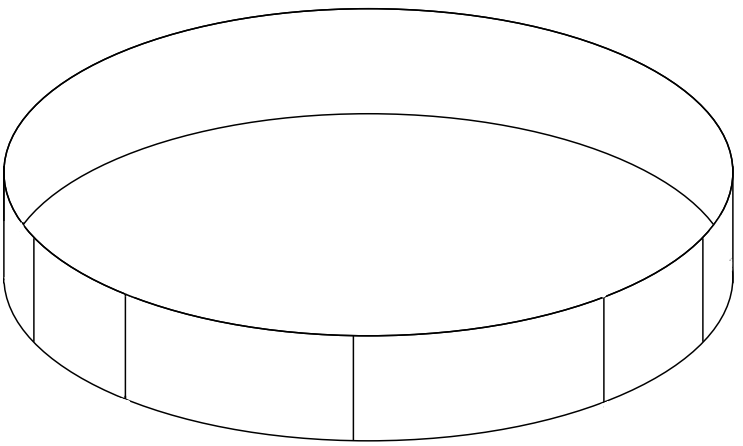


Fig. 4.3 周期境界条件の概念図

Fig. 4.3 を見て分かるようにセル番号 1 のセルの左のセルがセル番号 n のセルとなり、セル番号 n のセルの右のセルがセル番号 1 のセルとなる。よって有限のセル空間を Fig. 4.4 ように無限のセル空間と感じることができる。

Fig. 4.4 を見てみるとシミュレーションはうまくいっているように感じる。ただし、この条件は両端のセルがお互いに影響し合うためにセル空間の長さによって求められる結果が違い、安定した結果が得られない場合があるようである。

開放境界条件 この境界条件の特徴は、左端のセルに車両が入って来る確率と右端のセルから車両が出て行く確率を与えることである。つまり、左端に車両がない場合に確

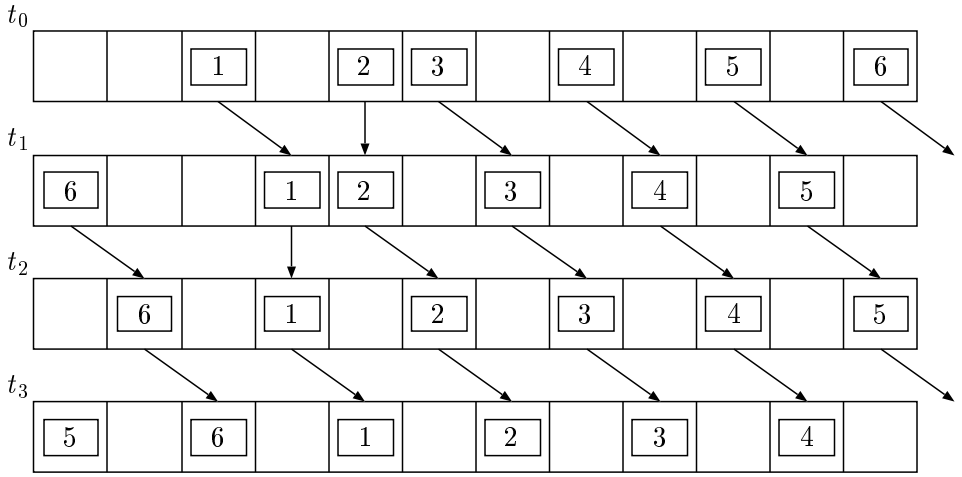


Fig. 4.4 周期境界条件の状態遷移図

率によって次のステップの左端に車両が存在するか否かが決まり、右端に車両がある場合に確率によって次のステップの右端に車両が存在するか否かが決まるということである。これにより実際の交通流に近い形をシミュレーションできることになる。図で表すと Fig. 4.5 のようになる。

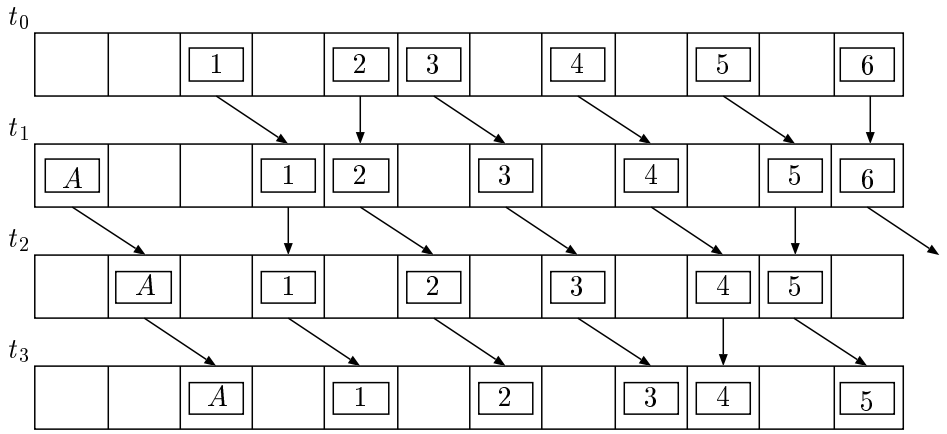


Fig. 4.5 開放境界条件の状態遷移図

5 セルオートマトンモデルのシミュレーション

4.2 節でセルオートマトンモデルについて説明した。この節では境界条件などを考慮したセルオートマトンモデル 184 をはじめ、いくつかのシミュレーション結果について考察していく。

5.1 セルオートマトンモデル 184 のシミュレーション

4.2 節で述べたルールに基づいて島状の境界条件、周期境界条件、開放境界条件についてシミュレーションを行った。セル数 x、ステップ数 t をそれぞれ 100 とし、車両は左から右へ移動し、ステップは一番上が初期状態で下に向かって時間が更新されていくものとする。また、車両の台数は設定可能にし、配置はランダムで行った。黒い点は車両の存在を意味し、白い部分は空きを意味する。

島状の境界条件 島状の境界条件を用いたシミュレーション結果を Fig. 5.1 に示す。セル空間の初期密度 (ρ=車両の台数 / セル数) は左が 0.20、右が 0.80 となっている。

Fig. 5.1 島状の境界条件を用いたシミュレーション

シミュレーション結果を見てわかるとおり、左のほうから右に向かって空いていいってしまうだけなので、この境界条件は交通流解析には向いていないようである。

周期境界条件 周期境界条件を用いたシミュレーション結果を Fig. 5.2 に示す。セル空間の密度は、周期境界ではどのステップでも均一であり、左上の図から順に 0.10, 0.30, 0.50, 0.70, 0.90 となっている。

シミュレーション結果を見てわかるとおり、渋滞列 (車両が 2 台以上続いている場所) は車両の進行方向と反対方向に伝播する。渋滞列は車両の密度が 0.50 以下だと時間更新を重ねていくうちに渋滞がなくなり、スムーズな流れになるが 0.50 より高くなると、発生した渋滞列の中には形が崩れずに安定しているものも出てくる (永遠に後方に伝播し続ける)。密度が高くなればなるほど安定している渋滞列は多くなる。これに対して空白列 (空きが 2 セル以上続いている場所) は渋滞列と正反対の特徴を持っている。

交通量 q と密度 ρ の関係は Fig. 5.3 のようになる。

その証拠として Fig. 5.4 のように左上から順に、密度 0.48, 0.49, 0.50, 0.51, 0.52 でシミュレーションを行った。

Fig. 5.3, 5.4 より $\rho < 0.5$ で $q = \rho$(自由流), $\rho \geq 0.5$ で $q = 1 - \rho$(混雑流) となっていることがわかる。また速度 v は $\rho < 0.5$ に対して $v = 1$ で一定であり、$\rho \geq 0.5$

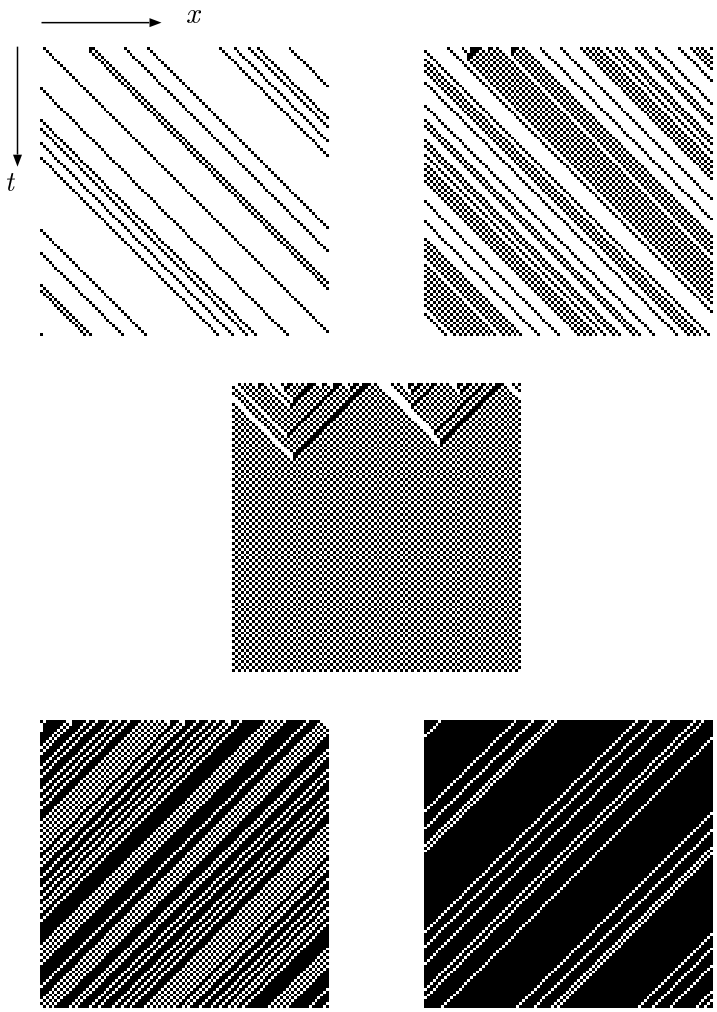


Fig. 5.2 周期境界条件を用いたシミュレーション

で $v = (1 - \rho)/\rho$ となる。自由流とは非渋滞領域を意味し、混雑流とは渋滞領域を意味する。

このようにセルオートマトンモデル 184 では、臨界密度 $(\rho_c = 0.5)$ で自由流から混雑流に転移する。この転移現象を相転移という。また、混雑流で渋滞列と空白列が分かれていることを相分離という。

開放境界条件 開放境界条件を用いたシミュレーション結果を Fig. 5.5 に示す。セル空間の初期密度は 0.30 と 0.70 でシミュレーションを行った。また、それぞれの密度で車両がセル空間に入ってくる確率 P_{in} と出ていく確率 P_{out} を指定した。初期値は同じものを使用し、セル空間の密度の変化を最小限に抑えるために、$P_{in} + P_{out} = 1$ としてある。

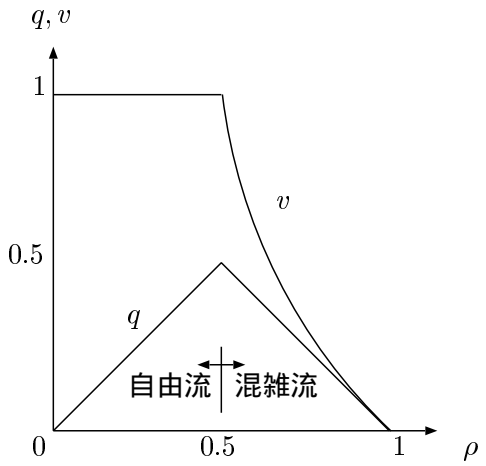


Fig. 5.3 セルオートマトンモデルの基本図

シミュレーション結果を見てみると、P_{in} と P_{out} の違いで得られる結果も変わってくることはわかる。そして、もう一つわかることは、全ステップを終了した最終ステップの密度が初期密度と変わっていることだ。密度 0.30 のグラフは左から 0.21, 0.40, 0.55、密度 0.70 のグラフは左から 0.42, 0.74, 0.83 に変わっている。大幅に変わっているのは低密度で P_{in} が高く P_{out} が低いものと、高密度で P_{in} が低く P_{out} が高いものだということがわかる。これに注目してステップ数を倍の 200 にしたものが Fig. 5.6 である。

結果を見るとやはり、それぞれ低密度から高密度、高密度から低密度へと変わってしまっている。セル空間の密度の変化を最小限に抑えるために、$P_{in} + P_{out} = 1$ としたのだがうまくいかなかったようである。これは左端のセルが空き状態になったときと右端のセルに車両がいるときのみに確率を働かせたのがいけなかったのだろうか。これについては、今後もう少し考察が必要だと感じた。

事故渋滞におけるシミュレーション 交通渋滞は何故起こるのかという問題を考えると、その要因はいくつか考えられる。まずは、密度の上昇による速度の減少から起こる自然渋滞がある。速度の変化には、道幅、天気による道路の状態、上り坂かどうか、日中か夜間かどうかなどが影響し自然渋滞に繋がることもあるだろう。また、自然渋滞とは別に赤信号の長さによる渋滞や事故による渋滞のように、ある箇所が通りにくくなるために起こる渋滞もある。

Fig. 5.7 に示すのは事故渋滞によるシミュレーション結果である。事故は、左から 50 番目と 51 番目のセルの間で起こったものとし、左から 50 番目のセルを通過しにくくなっている。左から 50 番目のセルに到達した車両は 30% の確率で左から 50 番目のセルを通過できるものとする。境界条件は、周期境界条件を用い、密度は左から 0.20, 0.50, 0.80 となっている。

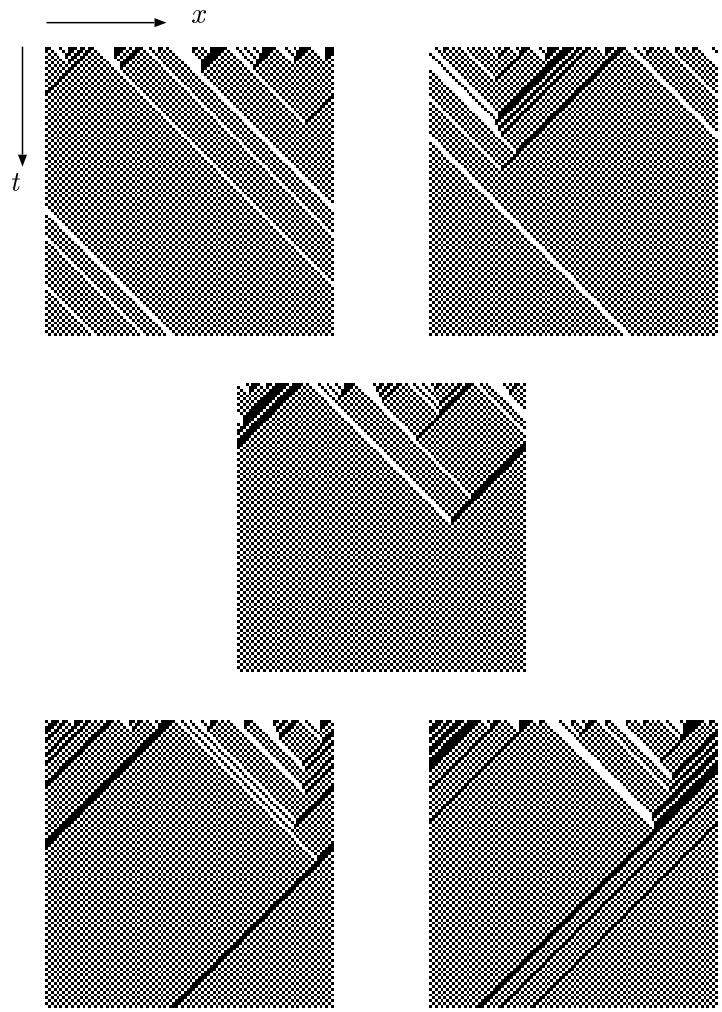


Fig. 5.4 臨界密度付近でのシミュレーション

Fig. 5.7 から考察できることは、低密度と高密度では事故現場付近に事故の影響が出るものの、全体的には安定している。その反面、中密度に置いては事故現場を挟んで左右対称にかなりの影響が出ているのが分かる。つまり、事故渋滞による渋滞の影響が一番出るのは中密度のときだということが言える。

5.2 スロースタートモデルのシミュレーション

これまで、セルオートマトンモデル 184 について見てきたが、実はこのモデルは大きな欠点を持っている。それは自由流、混雑流への相転移が単純すぎることである。このことは Fig. 5.3 と西成 [8] による現実の交通流の基本図 Fig. 5.8 を見比べればわかるだろう。(q(台数 / 5min), ρ(台数 / km) となっている)

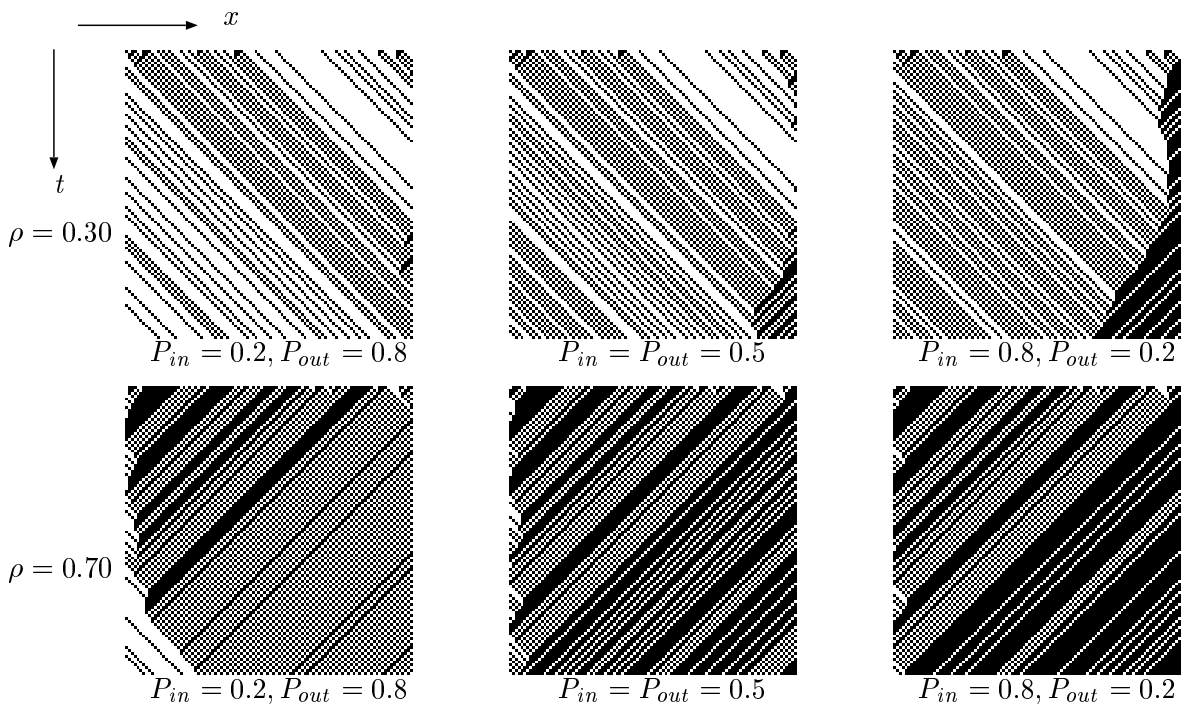


Fig. 5.5 開放境界条件を用いたシミュレーション

実測データにはゆらぎ (ずれ) が入っているが、おおまかに見ると漢字の「人」のような図形になっている。つまり、自由流から混雑流への相転移はそう単純ではなく、オーバーシュートが存在すると考えられる。これは自由流を示す直線が混雑流になる臨界密度を超えて少し伸びた状態 (メタ安定分岐) として表現できる。そしてこの不安定性は交通流の持つ本質的な性質であり、自然渋滞を引き起こす要因として考えられている [8]。

以上のことよりセルオートマトンモデル 184 は、やはり実際の交通流を表現できていないという意味で単純すぎるということがわかる。そこで登場するのが現在メタ安定状態を表現するのに一番有効であると考えられているスロースタートモデルである。このモデルの特徴は、一度止まった車両は動きにくいということをルールに組み込むことである。モデルのルールは、一度停止した車両は前が空いていて動けるようになっても一度待ってから動き始めるとする「一回休み」のルールであり、停止した車両以外はルール 184 に従う。これを西成 [8] は「一度停止した場合、前が空いても 1 時間ステップ待つ」と解釈し、この解釈のもとにシミュレーションを行ったものが Fig. 5.9 である。境界条件は周期境界条件を用い、密度は左が 0.33、右が 0.34 となっている。

シミュレーションを重ねた結果、密度 0.33 までは混雑流が残ることはないが密度 0.34

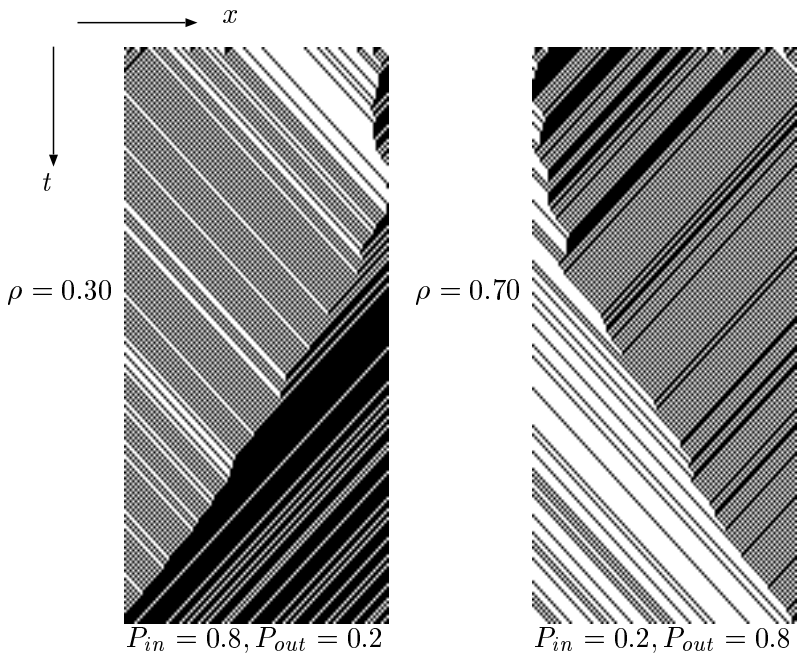


Fig. 5.6 ステップ数 200 でのシミュレーション

を越えると混雑流が出始める。これにより、このモデルの臨界密度は $(\rho_c = 1/3)$ だということがいえるのではないだろうか。

スロースタートモデルの基本図を、再びセルオートマトンモデルの基本図とともに Fig. 5.10 に示す。

Fig. 5.10 を見ると、密度と交通量が共に 0.33 のときに相転移が起こり、その点から右上に向かってうまくメタ安定分岐が表れている。分岐の部分は、車両をランダムに配置しただけではうまく表れず、初期状態を車両が 2 台以上続かないようにしなければならない。そうすれば密度 0.50 でも相転移しないことより Fig. 5.10 が成り立つ。これは、実際には高密度自由流が不安定で出現しにくいことをしっかり表現できている。

5.3 NS モデルのシミュレーション

次に NS モデルを紹介する。このモデルは 1992 年に K.Nagel と M.Schreckenberg によって考え出されたもので、確率によるランダム性が取り入れられている。ルールは、速度が今までは 0 か 1 だったのに対し、0 から $v_{max} = 5$ としている条件のもと 4 つで構成されている。以下に、湯川 [2] に書いてあるものを記す。

加速　もし車の速度 v が最高速度 v_{max} より小さかったら、かつ今の速度 v で進む距離に 1 格子点分を加えた距離に他の車がいなかったら、速度を $v + 1$ にする。

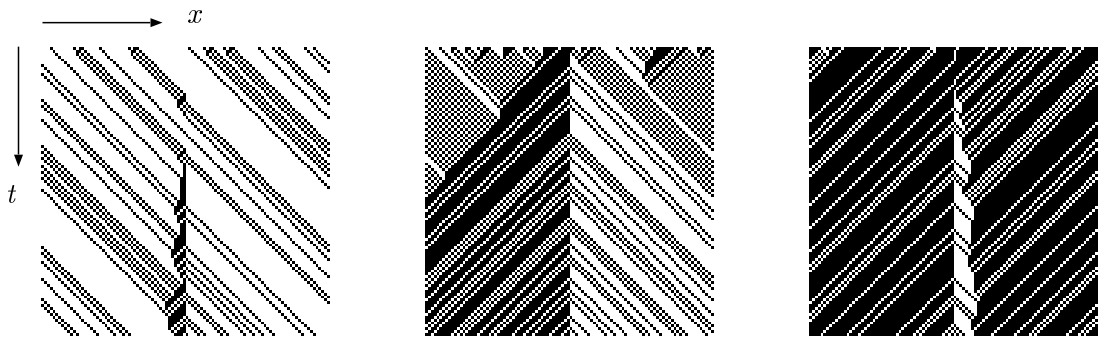


Fig. 5.7 事故渋滞におけるシミュレーション

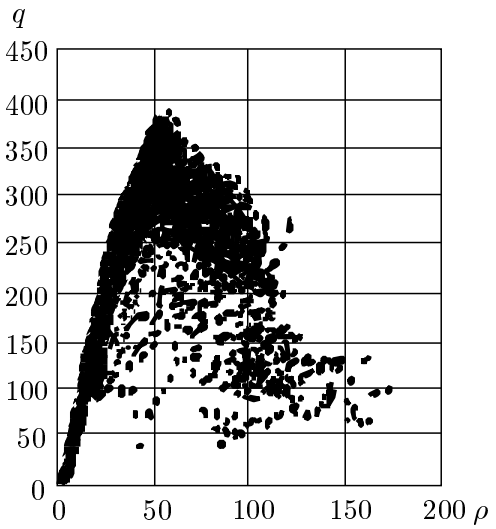


Fig. 5.8 現実の交通流の基本図

減速　車が格子点 i にいてその前の車が格子点 $i+j$ にいるとき、もし $j \leq v$ なら格子点 i にいる車の速度を $j-1$ にする。

ランダムブレーキ　確率 p で車の速度が 0 でないとき速度を 1 小さくする。

車の運動　速度 v の車はその位置を v 進める。

これに対し木原 [4] が、湯川 [2] 以外の文献においても考察した結果、どの文献においても確率 p によるランダムブレーキをいつ適用するのかということと車の運動は更新前の速度で進むのか更新後の速度で進むのかということがはっきり記述されていないとし、「ドライバーの行動の不規則性を表せるルール」として書き直したのが以下のものである。

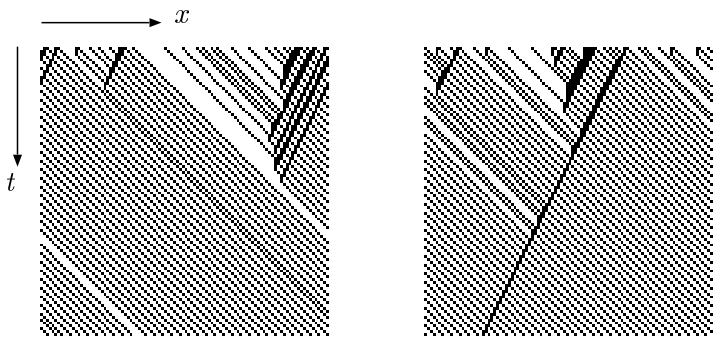


Fig. 5.9 スロースタートモデルのシミュレーション

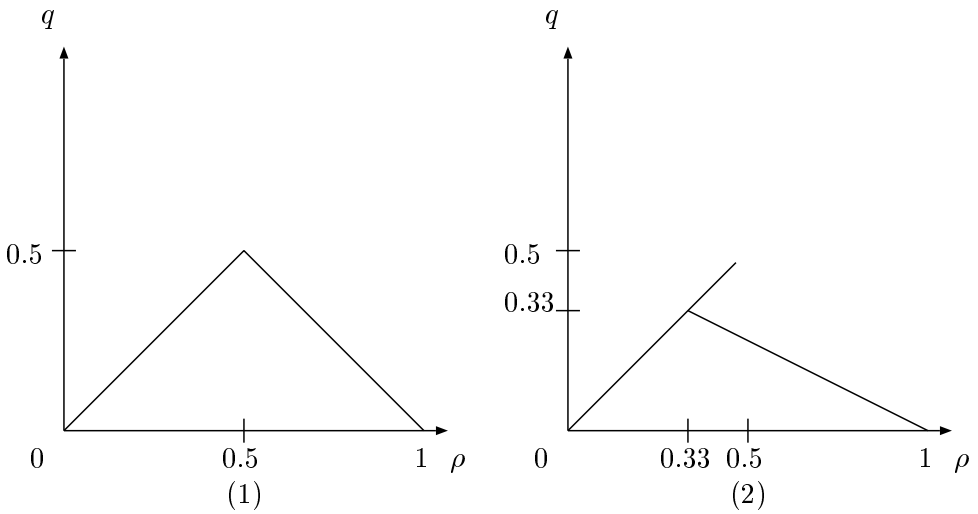


Fig. 5.10 (1) セルオートマトンモデルの基本図 (2) スロースタートモデルの基本図

車 C の速度を v_1 とする。

1. 車 C の速度が v_{max} より小さく $(v_1 < v_{max})$、かつ、前方 $(v_1 + 1)$ までの距離に車がいなかったら、車 C の速度を 1 だけ上げる。$(v_2 = v_1 + 1)$
2. 車 C が点 i にいて、その前の車が点 $(i + j)$ にいるとき、$j \leq v_1$ なら点 i にいる車の速度を $(j - 1)$ にする。$(v_2 = j - 1)$
3. 1., 2. に当てはまらなかった場合は、$(v_2 = v_1)$ とする。
4. 車が停止していないとき $(v_2 \neq 0)$、確率 p で 1 だけ減速する。$(v_3 = v_2 - 1)$
5. 次のステップで車を v_3 セル進める。 4. の規則にあてはまらなかった車は v_2 セル進める。

このルールを用いて、セル数 100×300 でシミュレーションを行ったものが Fig. 5.11 である。境界条件は周期境界条件を用い、プログラムは最高速度が $v_{max} = 8$ まで設定でき、ランダムブレーキも確率を設定できるようにしてある。左の 2 つは密度 0.18、右の 2 つが密度 0.19 となっている。最高速度 $v_{max} = 5$、ランダムブレーキが働く確率 0.1 は共通となっている。

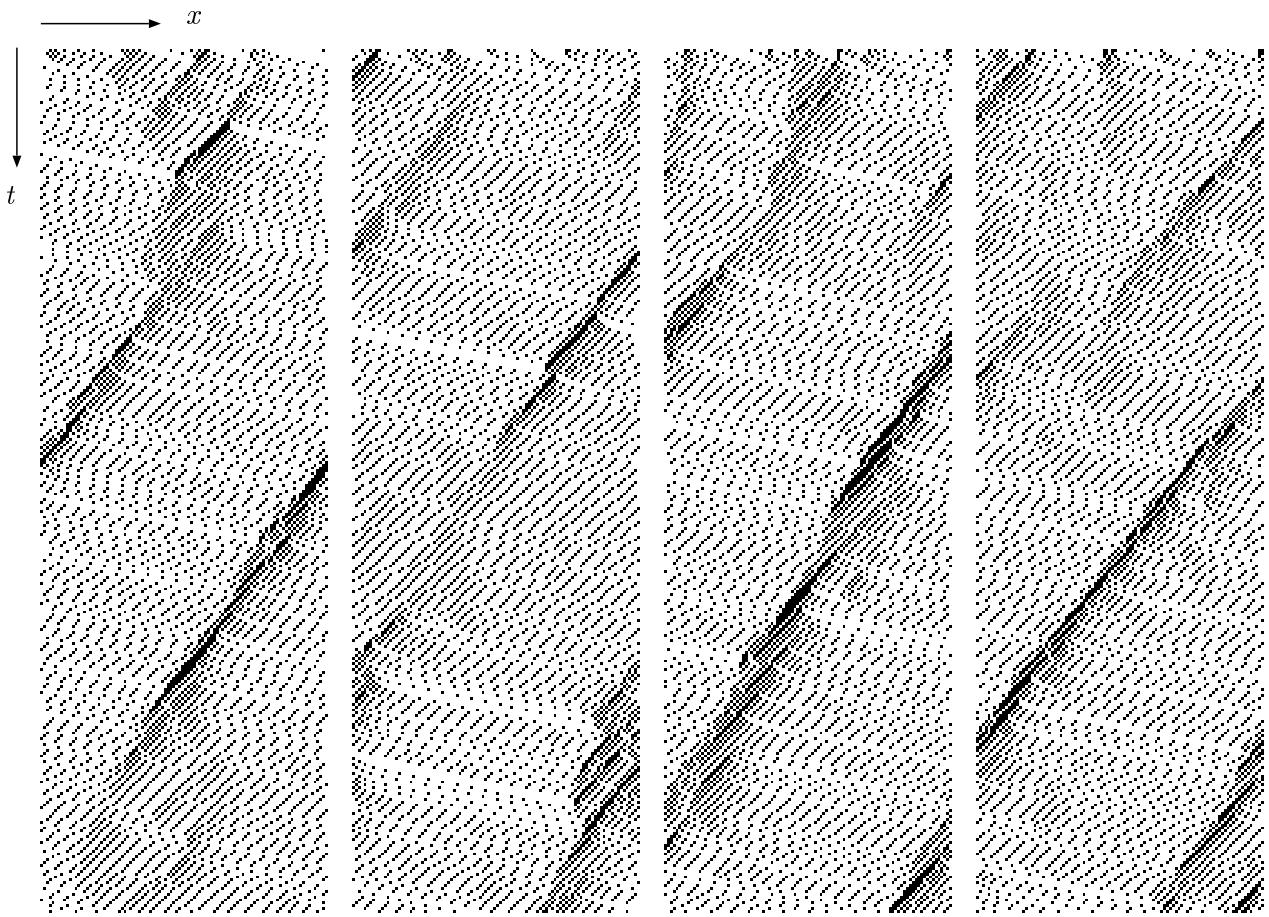


Fig. 5.11 NS モデルのシミュレーション 1

微妙な違いだが密度 0.18 のほうは渋滞列が表れても消えているが、密度 0.19 のほうは渋滞列が続いていくように感じる。ただ、今までのモデルと違って、ランダムブレーキが働く確率や最高速度によっても結果は違ってくると思われるので、密度を 0.18 に固定して、最高速度とランダムブレーキが働く確率を変えてシミュレーションを行った。Fig. 5.12 に示すのは左の図が最高速度だけを $v_{max} = 8$ としたもので、真中の図がランダムブレーキが働く確率だけを 0.6 としたもので、右の図が最高速度を $v_{max} = 8$、ランダムブレーキが働く確率を 0.6 としたものである。

Fig. 5.12 より、最高速度を上げてもランダムブレーキが働く確率を上げても混み具合

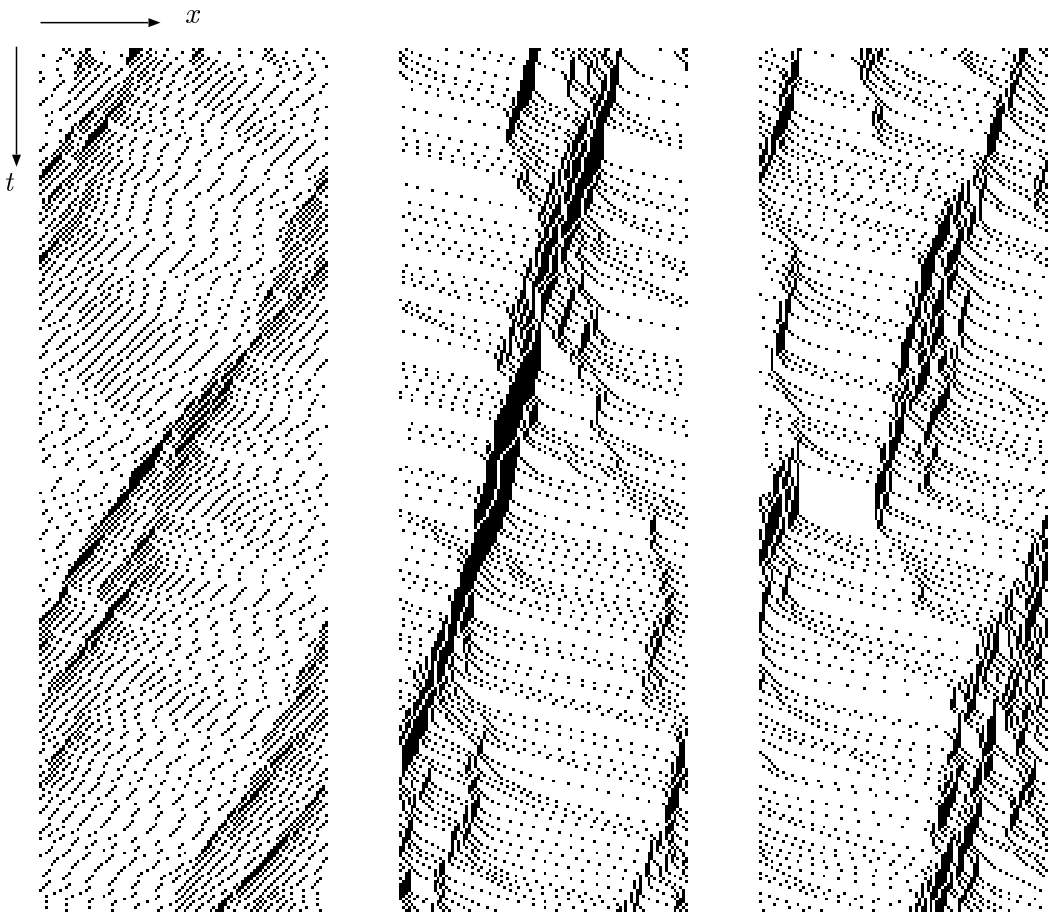


Fig. 5.12 NS モデルのシミュレーション 2

に影響が出ることがわかる。いろいろな要因が作用して結果が変わってくるということは実際の交通流に近いといえるのでこのモデルは紹介した中では一番交通流解析に向いているのではないかと感じた。

6 流体モデルとセルオートマトンモデルの比較

ここまで、流体モデルとセルオートマトンモデルについて別々に説明してきた。この章では、これら別々のモデルについて、共通点や相違点を見つけながら考察していく。

6.1 Lax–Friedrichs の差分法による数値計算

3.2 節で Lax–Friedrichs の差分法について説明した。セルオートマトンモデルとの比較には、Lax–Friedrichs の差分法による数値計算のデータを用いることにする。

それでは、Fig. 6.1 に数値計算の結果を示す。初期設定は x の最大値 $M = 100$、計

算回数 $t = 100$ (次の $\rho_1, \rho_3, \cdots, \rho_{97}, \rho_{99}$ を求めて 1 回とする)、$\rho_1, \rho_3, \cdots, \rho_{97}, \rho_{99}$ の初期密度はランダムで与え、左側のグラフが平均密度 0.470634、右側のグラフが平均密度 0.550502 となっている。

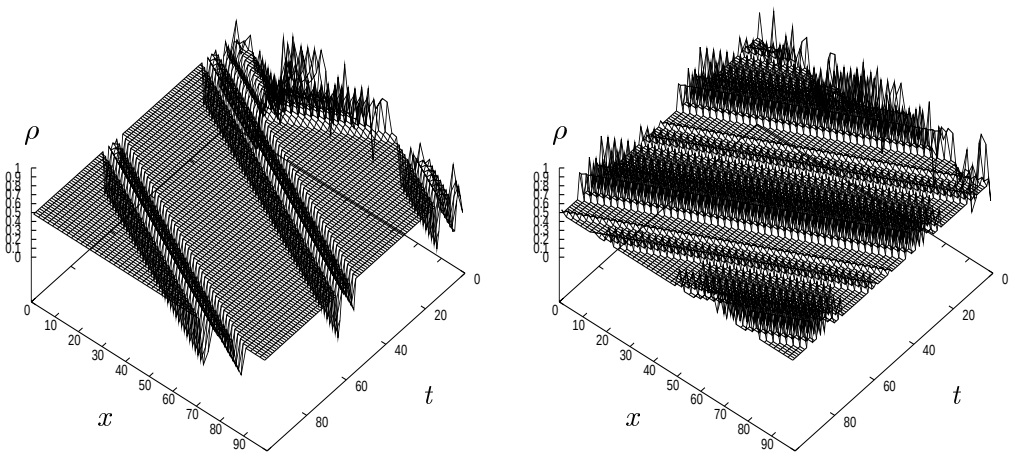


Fig. 6.1 3 次元でのグラフ化

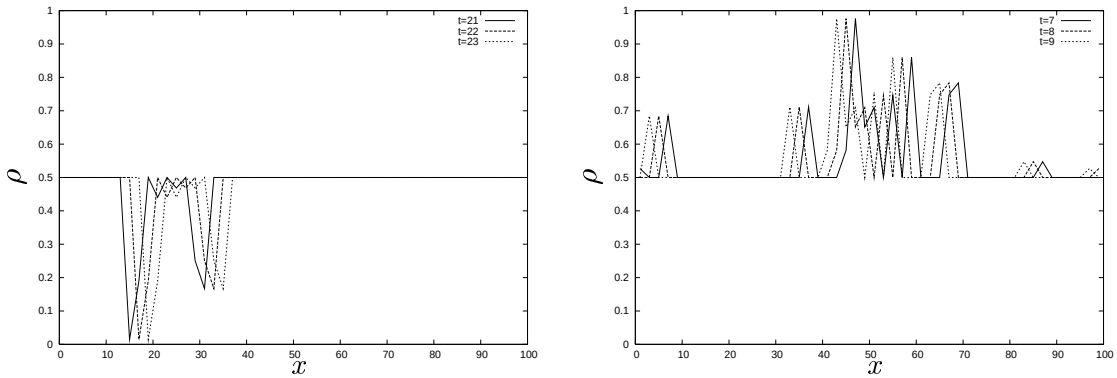
Fig. 6.1 を見てみると、計算を繰り返していくうちに、ある同じ値の数値が多くなっていることに気付くはずである。そして、それはデータから 0.5 だということがわかった。密度が 0.5 になってしまう理由は、式 (3.18) がある条件を満たすと $\rho(x, t + \Delta t)$ の値が 0.5 になってしまう、という点にあるようである。ある条件とは、求めたい $\rho(x, t + \Delta t)$ に対して

- $\rho(x - \Delta x, t) > 0.5 > \rho(x + \Delta x, t)$ の場合
- $\rho(x - \Delta x, t) < 0.5 < \rho(x + \Delta x, t)$ の場合
- $\rho(x - \Delta x, t) = \rho(x + \Delta x, t) = 0.5$ の場合

のときである。この条件を満たした場合、$\rho(x, t + \Delta t)$ の値は必ず 0.5 になってしまう。ただし、これには式 (3.19) の CFL 条件が関係してくる。行った数値計算では、$\Delta t/\Delta x$ が式 (3.19) を満たす最大の数値になるように Δt と Δx を設定してある。$\rho(x, t+\Delta t)$ の値が 0.5 になってしまう理由には、こんなことも影響しているようである。

Fig. 6.2 は、3 次元データを x と ρ の 2 次元グラフにしたものである。左側の図は、Fig. 6.1 に使用した平均密度 0.470634 のデータのグラフで、右側の図も同じく、Fig. 6.1 に使用した平均密度 0.550502 のデータのグラフである。グラフにはデータの 1 部分だけを抜粋し、描いている。

Fig. 6.2 を見てみると、既にほとんどの値が 0.5 になっていることに気付く。そして密度 0.5 以下を低密度、密度 0.5 以上を高密度と考え、車両の進行方向を右とすると、低



密度 0.5 以下のグラフ　　密度 0.5 以上のグラフ

Fig. 6.2　2 次元でのグラフ化

密度の点は前方に伝播し、高密度の点は後方に伝播することが見て取れる。さらに Fig. 6.2 は、同じ状態のグラフがずれて重なっている。これは、この先左、右の両グラフともこの状態が続くので、このように表示している。つまり、同密度の点の集合が同間隔で並び、移動していくだけである。この流れは、左側の図は $t = 21$ から始まり、右側の図は $t = 7$ から始まる。グラフの上では、左側の図は $t = 21$ から安定し、右側の図は $t = 7$ から安定していると言えるだろう。データから、平均密度が 0.5 以下のグラフでは、0.5 より大きい値がなくなるとグラフが安定し、平均密度が 0.5 以上のグラフでは、0.5 より小さい値がなくなるとグラフが安定することもわかった。

では、このグラフから実際の交通の流れを考察してみる。仮に、密度 0.5 を安定している状態、密度 0.5 以下を空きの状態、密度 0.5 以上を混雑の状態と考えると、混雑の状態、空きの状態以外の場所は安定していると言えるだろう。これは、密度 0.5 の状態をセルオートマトンの 01 もしくは 10 の状態と考えると納得できる。混雑の状態、空きの状態の場所は、そこの場所で多少の混雑や空きの状態あるとしても、やはり全体的に見ると交通流としては安定した流れを想像できる。

6.2　セルオートマトンモデルでのシミュレーション

セルオートマトンモデルとの対応を調べるために、まず、セルオートマトンモデルの初期値を承けて流体モデルの初期値を決定するのか、流体モデルの初期値を承けてセルオートマトンモデルの初期値を決定するのかを考えなくてはならない。これを、この実験では後者の方法を用いることにする。

Lax–Friedrichs の差分法による数値計算のデータの初期値は、0 から 1 までの間でランダムに指定している。しかし、セルオートマトンモデルのデータに必要なのは、1 か 0 である。そこで、初期値設定の方法の一つとして、6.1 節の数値計算のデータを用いて、密度が 0.5 より上の場合は 1、密度が 0.5 より下の場合は 0 として設定した。すると、セ

ルオートマトンモデル上では、平均密度 0.470634 のデータのグラフは平均密度 0.50、平均密度 0.550502 のデータのグラフも平均密度 0.50 になった。そこで、本来の平均密度に近付くように、平均密度 0.470634 のデータのグラフに合わせたセルオートマトンモデルは、1 番混んでいる部分の車両を 1 台減らし、平均密度 0.550502 のデータのグラフに合わせたセルオートマトンモデルは、1 番空いている部分と 2 番目に空いている部分に車両を 1 台づつ増やした。Fig. 6.3 に示すのは、左から、平均密度 0.470634 の初期値をそのまま使ったもの、その初期値に手を加えたもの、0.550502 の初期値をそのまま使ったもの、その初期値に手を加えたものである。

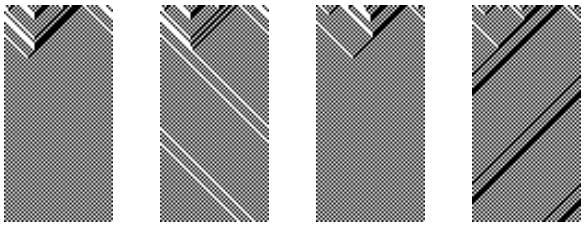


Fig. 6.3 50×100 のセル空間でのシミュレーション

また、密度が 0.5 より上の場合は 11、密度が 0.5 より下の場合は 00 として、100×100 のセル空間でもシミュレーションを行った。平均密度 0.470634 の初期値は 3 台分手を加え、平均密度 0.550502 の初期値は 5 台分手を加えた。Fig. 6.4 に示すのは、左から、平均密度 0.470634 の初期値を 11,00 に変え、そのまま使ったもの、その初期値に手を加えたもの、0.550502 の初期値を 11,00 に変え、そのまま使ったもの、その初期値に手を加えたものである。

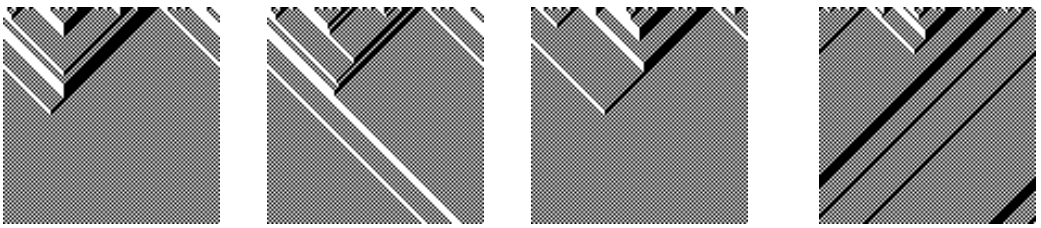


Fig. 6.4 100×100 のセル空間でのシミュレーション

Fig. 6.3 と Fig. 6.4 を Fig. 6.1 と照らし合わせてみると、Fig. 6.3 の手を加えた方のグラフは、安定してからの波の動きが Fig. 6.1 と似ているように見える。しかし、これだけでは対応しているとは言い切れない。特に、初期値から安定するまでの間の状態が対応しているのかどうかということが、確認できていない。

6.3 両モデルの対応の考察

6.1 節と、6.2 節から考察できることをまとめる。

1. 6.1 節から考察できること。
    - 平均密度 0.5 という数字はセルオートマトンモデルの 10 または 01 に対応し、安定を意味する。つまり、0.5 の続く場所は、010101010101 のようになっていると考えられる。
    - Lax-Friedrichs の差分法による数値計算でも、相転移は 0.5 で起こっていると考えられる。
    - セルオートマトンモデルで、混雑の波と空きの波が逆向きだったように、Fig. 6.1 からもそのような波の逆向きが確認でき、向きも、セルオートマトンモデルに対応している。つまり、見た目上は似ていると言える。
2. 6.2 節から考察できること。
    - 初期値の設定方法によっては、安定した後のグラフの波がほぼ同じように見えるものもある。
    - セルオートマトンモデルの図と Lax–Friedrichs の差分法による数値計算のグラフを照らし合わせてみると、安定してからの波の動きは似ているので、対応がつくと言える。

以上が、対応がついたと考えられるものである。

7 まとめ

今回の研究は、流体モデルとセルオートマトンモデルの比較、ということで行ってきたが、多くの課題が残る研究になった。

まず、流体モデルの初期値をセルオートマトンモデルに合わせる方法が、良かったのかどうかということがある。実験では、流体モデルの 0.5 より上の値を 1、0.5 より下の値を 0 としてセルオートマトンモデルに与えた。しかし、その方法では対応の確認ができなかった。初期値の与え方としては、セルオートマトンモデルの初期値を、流体モデルの初期値に反映させるほうが自然だったのかもしれない。例えば、セルオートマトンモデルの 5 セル分を流体モデルの 1 点分と考えれば、流体モデルの初期値には 0.0,0.2,0.4,0.6,0.8,1.0 を与えることができる。

また、初期値から安定状態に入るまでの対応がつくか否か、ということも確認できなかった。そのせいで、流体モデルとセルオートマトンモデルの対応、についての結論を出せなかった。

今後の課題としては、両モデル間で初期値から安定するまでの対応がつくのかどうか、3.1 節で紹介した停止モデルとセルオートマトンモデルの対応、5.3 節で紹介した NS モデルと流体モデルの対応などが挙げられる。

参考文献

[1] R.Harberman : “*MATHMATICAL MODEL : TRAFFIC FLO W*”, (中井暉久 訳, 現代数学社, 1981)

[2] 湯川諭 : “計算物理学および統計力学的手法をもちいた一次元交通流の研究–交通渋滞の統計力学–”, 大阪大学大学院理学研究科修士論文, (1995)

[3] 西田匡佑 : “停止距離から導かれる交通流の数学モデルとその数値解析”, 新潟工科大学情報電子工学科卒業論文, (1999)

[4] 木原修 : “セルオートマトンモデルによる交通流解析”, 新潟工科大学情報電子工学科卒業論文, (2000)

[5] 鈴木保弘 : “交通流の流体モデルにおける信号の考察とその数値解析”, 新潟工科大学情報電子工学科卒業論文, (2000)

[6] 東海林隼人 : “交通流の流体モデルにおけるカーブの考察とその数値解析”, 新潟工科大学情報電子工学科卒業論文, (2002)

[7] 長谷隆 : “交通渋滞はなぜ起こるか”, 科学 **66**, pp 617–624 (1996)

[8] 西成活裕 : “交通流のセルオートマトンモデルについて”, 応用数理 **12**, no.2, pp 26–37 (2002)