交通流の流体モデルにおけるカーブの考察とその数値解析

平成 14 年 2 月 5 日

情報電子工学科 竹野研究室
東海林 隼人

目 次

1 はじめに **1**

2 車の基本量 **1**
2.1 速度、密度、交通量の関係 1

3 車の保存則 **2**
3.1 速度と密度の関係 2

4 停止距離モデル **3**
4.1 坂道での停止距離 4
4.2 ブレーキの運動 4

5 カーブ時の停止距離モデル **7**
5.1 カーブ時の車の運動 7
5.2 カーブ時のタイヤの軌道 8
5.2.1 舵角とスリップ角 10
5.3 カーブでのブレーキについて 10
5.4 4 輪モデルの場合 13
5.5 4 輪の不静定問題 15
5.6 4 輪の場合の停止距離モデル 15
5.7 最高速度制限 17

6 数値計算 **18**

7 まとめ **22**

参考文献 **24**

概要

交通の流れを解析するには大きく分けると、流体モデル、セルオートマトンモデル、追従モデルに分けられ、ここでは交通流の流体モデルのカーブの考察を行う。流体モデルとは交通の流れを流体運動とみなして偏微分方程式のモデル化を行うものである。これは条件のない直線運動を前提にして考えられたモデルで、これに対し竹野研究室では道路に斜面がある場合、信号があるような場所での車の運動をモデル化する研究が過去に行われている。本稿では道路に条件のある場合についてカーブがあるような場合を考察する。まずカーブにおける車の運動について考察し、停止距離モデルを用いてカーブでの交通流のモデル化を行った。次にその保存則方程式を Lax-Friedrichs 法で数値解析した。その結果、カーブに入った時には密度は一時的に上昇し、カーブを抜けて直線に戻った時には密度が一時的に下がるという結果を得たのでこれを紹介する。

1　はじめに

流体モデルの交通流は何の条件もない平坦な直線の道路を想定したものである。これに対し、過去の西田氏の研究 [1)] では坂道での場合、鈴木氏の研究 [2)] では信号が加わった場合どのようになるか、道路の形状や状況が異なる場合の交通流のモデル化を行い直線の場合との比較を行っている。本研究ではカーブの場合それはどのようになるかを考察しモデル化を行う。

第 2 章、第 3 章では流体モデルで必要な概念について述べ、第 4 章では停止距離モデルの他に、スリップが起こらないようなブレーキ力の条件を考え静摩擦での停止距離の考察を行う。第 5 章では、カーブの場合での車の運動のモデル化を静摩擦での場合と同様に考察し、第 6 章でその数値計算についてを述べる。

2　車の基本量

交通流で必要な概念はまず、速度、密度、交通量である。速度が大きいということはその分車の密度は小さく、逆に渋滞のような密度が大きな状態では全体の速度は小さくなる。また交通量は観測者から見たある位置を車がある時間に通過する量のことをいう。

2.1　速度、密度、交通量の関係

速度を v 、車の位置を x 、時刻を t とおいたとき、速度は x_1 にいる車の時刻 t_1 における速さを $v(x_1, t_1)$ x_1 にいる車の時刻 t_2 における速さを $v(x_1, t_2)$ というような速度場の表し方にする。

密度は固定された時間内での与えられた領域内の車の台数であり、これを ρ で表す。車間距離 d、車の全長 L とおくと密度は次のように表される。

$$\rho = \frac{1}{L + d} \tag{2.1}$$

交通量は観測者から見たある位置を車がある時間に通過する量のことで、これを q で表す。定速 v_0 、定密度 ρ_0 で車が動いている場合を考えると、時刻 τ の間に車が $v_0\tau$ だけ移動した時、 ρ_0 は単位長さあたりの車の密度なので、時刻 τ の間に観測者を通過する車の数は $\rho_0 v_0 \tau$ である。したがって交通量は

$$q = \rho_0 v_0 \tag{2.2}$$

となる。一般には交通量は時間と位置に依存するので次のように表す。

$$q(x, t) = \rho(x, t) v(x, t) \tag{2.3}$$

3　車の保存則

道路上のある区間内に N 台の車がある場合を考える。位置 x における密度 $\rho(x)$ は、区間 $[x,(x+\Delta x)]$ における車の台数 $N(x+\Delta x)-N(x)$ と Δx の比の、幅 Δx を限りなく小さくしたものと考えられるので、

$$\rho(x)=\lim_{x\to 0}\frac{N(x+\Delta x)-N(x)}{\Delta x}=N'(x)$$

となる。区間内の車の台数 $N(x)$ は密度を積分することで求められるので、区間 $[a,b]$ の車の台数は

$$N=\int_a^b \rho(x,t)dx=q(b,t) \tag{3.1}$$

となる。よってこの区間における車の数の変化率は、単位時間あたりに区間の a から入って来た車の台数 $q(a,t)$ と b から出て行く車の数 $q(b,t)$ で決まる。よって車の保存則は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx=q(a,t)-q(b,t) \tag{3.2}$$

これは積分保存則と呼ばれる。

これを $x\to y$,$b\to x$, $\frac{d}{dt}\to\frac{\partial}{\partial t}$ と置き換えて x について偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^x \rho(y,t)dy=\frac{\partial}{\partial x}\{q(a,t)-q(x,t)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}q(x,t)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0 \tag{3.3}$$

が得られる。 この式は、車の保存則が偏微分方程式で表されることを示している。

3.1　速度と密度の関係

速度と密度の関係には、Lighthill と Whitham の提唱したモデルがある。このモデルは、車の速度は車の密度のみに依存するというものであり、それは次のように定義される。

$$v=v(\rho)$$

このモデルは密度が 0 の状態では速度は制限速度内で最大となり $v(0)=v_{max}$ となり、逆に密度の高い状態では車は停止してしまい速度は 0 になり $v(\rho_{max})=0$ のように表すことができる。

交通量もまた $q=\rho v$ より、保存則は ρ の関数になる。よって次のように表せる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{\rho v(\rho)\}=0$$

4　停止距離モデル

保存則の式について、直線での速度 $v(\rho)$ が密度だけでなく道路の状態にも依存する形 $v(\rho, x)$ でのモデル化を行ったのが、西田 [1)]、鈴木 [2)] での主な内容であり、それには停止距離モデルが使われている。停止距離は、運転手がブレーキを踏もうと思って踏むまでの時間 (空走距離) と、ブレーキが効き始めてから車が停止するまでの制動距離の和で求められる。

速度 v は密度 ρ に依存し、密度は $1/(L+d)$ で表される。車の長さ L は一定の長さだが、車間距離 d は車がブレーキを踏んで止まるまでの停止距離によって変化するため、この車間距離を停止距離として考える。

空走距離の時間 t_0、そのときの速さ v_0、制動距離を d_1 とすると、空走距離は $t_0 v_0$ 、停止距離は $t_0 v_0 + d_1$ で表せる。ここで制動距離は、車が一定の負の加速度で減速するものと仮定し、これを等加速度直線運動の式より求める。この式は

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

より次のようになる。

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

これは移動する物体が初速度 v_0 からある速度 v まで減少、増加するような様子を示している。(a は加速度、x は移動距離である。) 制動距離 d は、上の式では x にあたる。初速は v_0 とし 、停止距離では最終的には車は止まるので上式の v は 0 である。制動距離は $0^2 - v_0^2 = 2ax$ より $-v_0^2/2a$ となる。

停止距離を d とすると以下のように表せる。

$$d = t_0 v_0 - \frac{v_0^2}{2a} \tag{4.1}$$

また、$F = -\mu mg, F = ma$ 、$a = -\mu g$ となる (μ:動摩擦係数) ので

$$d = t_0 v_0 + \frac{v_0^2}{2\mu g} \tag{4.2}$$

これを v_0 についての 2 次方程式とみなし、解の公式を用いると $v_0 > 0$ より次のようになる。

$$v_0 = -\mu g t_0 + \sqrt{\mu^2 g^2 t_0^2 + 2\mu d}$$

$$v_0 = -\mu g t_0 + \sqrt{\mu^2 g^2 t_0^2 - 2\mu g (L - \frac{1}{\rho})} \tag{4.3}$$

4.1 坂道での停止距離

道路が坂道である場合、西田 [1] は、停止距離が

$$d = t_0 v_0 + \frac{v_0^2}{2(\mu \cos\theta + \sin\theta)g}$$

であるモデルを用いた。ここで θ は傾斜の角度である。

これを式 4.1 と比べると μ の部分だけ変わったものと考えられる。

このモデルは、速度は密度だけではなく斜面の角度によっても変化するため $v = v(\rho, \theta)$ となり、通常の直線の $v = v(\rho)$ とは異なった、道の形状を反映したものである。これと同様にして、カーブの場合ではどのようになるか、カーブにおける車の運動のモデル化を考察する。

4.2 ブレーキの運動

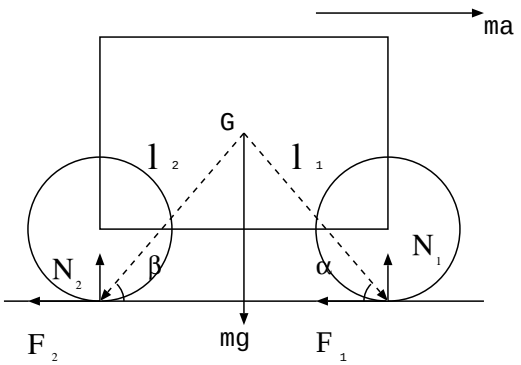


Fig. 4.1 車の図

ここではブレーキの運動について考察する。進もうとする力 $F = ma$ に対して摩擦 F_1, F_2 が働き、タイヤの垂直抗力はそれぞれ N_1, N_2 、車の重心を G とする。まず、

$$ma = (-F_1) + (-F_2) \tag{4.4}$$

鉛直成分は抗力と等しく、

$$0 = -mg + N_1 + N_2 \tag{4.5}$$

まずはブレーキをかけない通常状態を考える。車そのものはそれぞれのモーメントがつりあって回転しないものとして考えられるので各成分と l の長さの力のモーメントの総和が 0 になる

$$F_1 l_1 \sin\alpha - N_1 l_1 \cos\alpha + F_2 l_2 \sin\beta + N_2 l_2 \cos\beta = 0 \tag{4.6}$$

次に前輪の移動分の回転角を ϕ 、慣性モーメントを I_1 、半径 R_1 とし、後輪の移動分の回転角を θ 、慣性モーメントを I_2 、半径 R_2 とおく。(1) 式から、

$$I_1\phi'' = F_1R_1$$

$$I_2\theta'' = F_2R_2$$

となる。また、移動距離はそれぞれ 半径 $\times$ 回転角 で求められ、それは等しい値になるので、

$$R_2\theta = R_1\phi$$

$$\phi = \frac{R_2}{R_1}\theta$$

加速度は 2 階微分より

$$\phi'' = \frac{R_2}{R_1}\theta''$$

$$I_1\phi'' = I_1\frac{R_2}{R_1}\theta'' = F_1R_1 \tag{4.7}$$

よって

$$F_1 = I_1\frac{R_2}{R_1^2}\theta''$$

$$F_2 = \frac{I_2}{R_2}\theta''$$

進もうとする力 $F = ma$ に対して摩擦 F_1, F_2 が働くので

$$mR_2\theta'' = (-F_1) + (-F_2) = -I_1\frac{R_2}{R_1^2}\theta'' - \frac{I_2}{R_2}\theta''$$

この式では $\theta'' = 0$ のとき等速円運動を行なう。そのときは摩擦も働かないことになる。

次に後輪にブレーキがかかり逆向きの回転運動が働くような場合を考えると、後輪に働いていたモーメントに図 1 より $-F_3R_3$ のモーメントが加わる。よって

$$I_2\theta'' = F_2R_2 - F_3R_3 \tag{4.8}$$

となり、最終的にこれらの式を連立させて解く。

$$ma = -F_1 - F_2$$

$$I_1\frac{R_2}{R_1^2}\theta'' = F_1R_1$$

$$I_2\theta'' = F_2R_2 - F_3R_3$$

$$0 = -mg + N_1 + N_2$$

$$F_1l_1\sin\alpha - N_1l_1\cos\alpha + F_2l_2\sin\beta + N_2l_2\cos\beta = 0$$

まず上の 3 つの式について連立させるとこれらは次のように求められる。

$$\theta'' = -\frac{R_3}{M}F_3 \tag{4.9}$$

$$F_1 = -\frac{I_1R_2R_3}{MR_1^2}F_3 \tag{4.10}$$

$$F_2 = -\frac{R_3}{R_2}(\frac{I_2}{M} - 1)F_3 \tag{4.11}$$

ただし、$M = I_2 + mR_2^2 + I_1\frac{R_1^2}{R_2^2}$ とする。

これらにおいて、ブレーキをかけたときに摩擦がかかってもスリップしてしまうような場合はブレーキの力が最大摩擦力を越えてしまう場合である。それは $F_2 > \mu_0N_2$ (μ_0:静止摩擦係数) のような場合である。求めた値を残りの二つの式に用いてスリップの条件を求める。

$$0 = -mg + N_1 + N_2$$

$$F_1l_1\sin\alpha - N_1l_1\cos\alpha + F_2l_2\sin\beta + N_2l_2\cos\beta = 0$$

モーメントの式を移項して

$$F_1l_1\sin\alpha + F_2l_2\sin\beta = N_1l_1\cos\alpha - N_2l_2\cos\beta$$

求めた各値を代入すると

$$-\frac{I_1R_3R_2}{MR_1^2}F_3l_1\sin\alpha - \frac{R_3}{R_2}(\frac{I_2}{M} - 1)F_3l_2\sin\beta = (mg - N_2)l_1\cos\alpha - N_2l_2\cos\beta$$

$$-\frac{R_3F_3}{M}\{\frac{R_2}{R_1^2}I_1l_1\sin\alpha + \frac{1}{R_2}(I_2 - M)l_2\sin\beta\} = mgl_1\cos\alpha - N_2(l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta)$$

さらに移項すると次のような結果になる

$$N_2(l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta) = mgl_1\cos\alpha + \frac{R_3F_3}{M}\{\frac{R_2}{R_1^2}I_1l_1\sin\alpha + \frac{1}{R_2}(I_2 - M)l_2\sin\beta\}$$

$$N_2 = \frac{mgl_1\cos\alpha + \frac{R_2R_3F_3}{M}\{\frac{I_1l_1}{R_1^2}\sin\alpha - (m + \frac{I_1}{R_1^2})l_2\sin\beta\}}{l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta}$$

これを $F_2 > \mu_0 N_2$ に代入して計算した結果、次のように求まった。

$$F_3 > \frac{\mu_0 M m g l_1 \cos\alpha}{R_2 R_3 (m + \frac{I_1}{R_1^2})(l_1 \cos\alpha + l_2 \cos\beta - \frac{\mu_0 I_1}{m R_1^2 + I_1} l_1 \sin\alpha + \mu_0 l_2 \sin\beta)} \tag{4.12}$$

結果より、ブレーキの力 F_3 を上の式で与えられる値以上にかけると車は止まり切れずにスリップする。

車が何らかで減速するときに、車は従来進んでいたときのもとの速さで進もうとする慣性力が働く。減速するときにもこれと同様に減速する車自体に慣性力が働き、前の方に押し出されるように力が働く。

そうすると車は極端にいうと後方が浮き上がるような感じになり、車の重心は前方に移動する。それにより前輪にかかる鉛直成分 mg も大きくなり、それに伴い N_1 も大きくなる。そしてその分後輪側の N_2 は、$mg = N_1 + N_2$ のこともあり、小さくなるといえる。

N_2 が小さくなるということは、$F_2 > \mu_0 N_2$ の条件においてスリップしやすくなるということで、ブレーキ F_3 が大きくなる程 (急ブレーキである程) N_2 は小さくなり $F_2 > \mu_0 N_2$ になってしまいやすくなる。

5　カーブ時の停止距離モデル

ここでは停止距離がカーブの時どのようになるかを考察する。カーブは直線とは違い遠心力の影響等があり、曲がり切れるかどうかも考慮しないとならない。運転する時に、路面の摩擦力より遠心力が大きくなってしまうと、車はカーブを曲がり切れずにカーブの外に飛び出してしまうので 摩擦力 $>$ 遠心力となるような運転をしなければならない。カーブの外側に飛び出さないようにし、なおかつ車間距離を気をつけるような場合を考える。

5.1　カーブ時の車の運動

直進時にブレーキを踏むと、重心は前の方に移動して後輪が浮くような形になる。これは車を横からみたとき、重心を軸にした車体にかかるモーメントである。これが、カーブのときになると、横から見たときだけではなく、上からみたとき、前後から見たときと 1 つの重心に対し 3 方向にモーメントがかかる。ここでは特に、上からみたときの回転運動に注目する。

車はカーブするときに前輪を方向転換させる。そのとき直進分の慣性が働き、タイヤに対して横方向にも摩擦が発生し、重心からの距離と横方向の摩擦によりモーメントが生じて車体に回転がかかる。この回転で後輪も次第に方向転換し始めて車は曲がる。

その際のタイヤにかかる摩擦力は、縦方向と横方向にかかる摩擦の合力で表され、カーブではこれを扱う。加減速には縦方向に摩擦が使われ、曲がるには横方向に摩擦が使われる。

それぞれのタイヤ自体にも最大摩擦力があるため、摩擦の合力が最大摩擦力をこえるような運転はしてはならない。加減速に摩擦を使い切っているようなとき曲がったりしてはいけない。

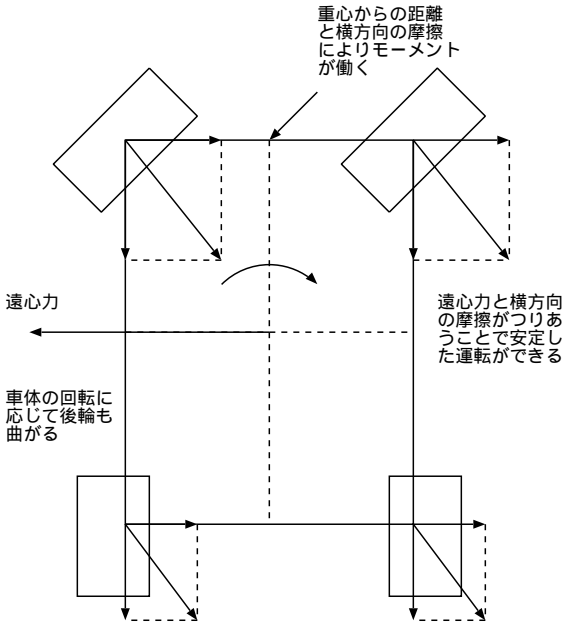


Fig. 5.1 カーブ時の車の運動

また、車がカーブを曲がるとき、遠心力が発生するが、これと横方向の摩擦がつりあうことによって安定した運転ができる。遠心力が横方向の摩擦をこえてしまうような場合、荷重が外側に大きくかかりカーブをはみだしたり横転の原因になってしまう。

なお、カーブでは遠心力を考慮して路面自体に傾斜が加えられているが、ここではこれを考えないものとする。

5.2 カーブ時のタイヤの軌道

車のタイヤの旋回の機構はアッカーマンとジャントウが 1880 年頃につくったアッカーマン型ステアリングがあり、これは現在でも一般的な構造である。車輪はそれぞれ円運動をするので、外輪の軌道半径は内輪よりも大きくなる。図に示すのはそのモデルである。図ではタイヤの向きと r_1, r_2 は垂直な関係であるとする。これらがどのような関係にあるかというと

$$r_1 \cos\alpha = r_3$$

$$\frac{L}{r_3} = \tan\alpha$$

$$\frac{L}{r_4} = \tan\beta$$

$$r_3 = r_4 - D$$

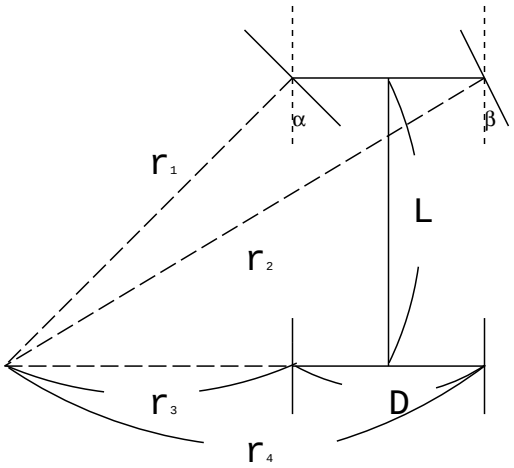


Fig. 5.2 アッカーマン型ステアリング

これらから、

$$\frac{1}{\tan\beta} - \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{D}{L}$$

という関係が導かれる。

また、r_1,r_3 は

$$r_1 \sin\alpha = L$$

$$r_3 \tan\alpha = L$$

これは移項すると

$$r_1 = \frac{L}{\sin\beta}$$

$$r_3 = \frac{L}{\tan\beta}$$

と表すことができ、左側の前輪、後輪が描く円の軌道を示している。同様にして右側の車輪の軌道も

$$r_2 = \frac{L}{\sin\beta}$$

$$r_4 = \frac{L}{\tan\beta}$$

のようにして表せる。

5.2.1 舵角とスリップ角

アッカーマン型ステアリングは実際は低速時に用いられるモデルであり、遠心力の影響は考えないものである。また、車が走るときはタイヤの接地面のねじれによって舵角通りには曲がらず、誤差が生じる。これはタイヤの横方向の摩擦により発生するので横滑べり角、またはスリップ角とよばれ、実際のカーブではこの角度で決まる。これは一定値の舵角には比例するがそれ以上では減少していきハンドルを切る程曲がれなくなることが知られている。またこの舵角の一定値はタイヤによって異なる。

実際は遠心力とスリップ角による影響があるが、モデル化にこれを適用すると複雑になり、また急ハンドルのような場面を想定しないため、これは扱わずアッカーマン型をもとに考察をすすめる。

5.3 カーブでのブレーキについて

まず、カーブでの車の運動について求めることは次の 3 つである。

- 車の運動方程式
- タイヤの回転運動
- 車体の回転運動 (上から見た図で)

カーブでブレーキをかけた時について、直線と同じようにしてして考察する。カーブの場合、横から見た図ではなく上から見た図を使い、ここでは 2 輪モデルを用いる。直線ではモーメントは 0 だが、カーブでは車体の回転が生じるためこれも考える。また摩擦を合力で考えて縦、横に分け、f_1 なら f_1^p, f_1^q のようにする。重心の位置も曲がる場合を想定するため車長上にはないものとして考える。

車体の回転運動は横から見たときと同様にして考える。ただし車体に回転が伴うので車体の慣性モーメント I_G 、回転角 ϕ として

$$I_G\phi'' = kf_1^p + kf_2^p + lf_1^q - (L-l)f_2^q \tag{5.1}$$

タイヤの回転運動は、図 5.4 のように見て、タイヤの回転方向と合力で表される摩擦の内積によって求められるので

$$I\theta_1'' = -(\mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{f_1})R \tag{5.2}$$

$$I\theta_2'' = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{f_2})R \tag{5.3}$$

(5.2) で、$\mathbf{p}_\alpha$ は $\mathbf{p}\cos\alpha + \mathbf{q}\sin\alpha$ 、$\mathbf{f_1} = f_1^p\mathbf{p} + f_1^q\mathbf{q}$ より次のように直せる。

$$I\theta_1'' = (-f_1^p\cos\alpha - f_2^q\sin\alpha)R$$

$\dot{I} = \frac{I}{R}$ とおいて

$$\dot{I}\theta_1'' = (-f_1^p\cos\alpha - f_2^q\sin\alpha) \tag{5.4}$$

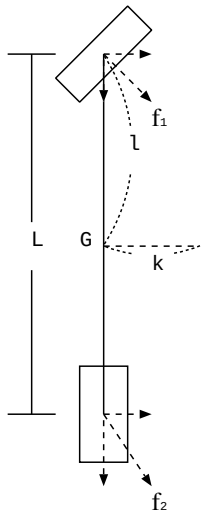


Fig. 5.3 カーブ時の 2 輪モデル

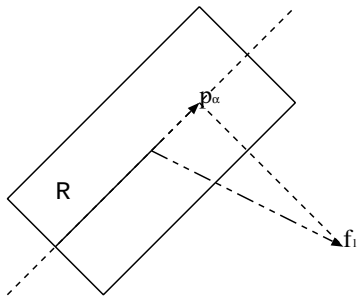


Fig. 5.4 カーブ時の車輪

また、ブレーキを後輪にかけたような場合を想定するので、直線の場合と同じように考えて、ブレーキ力を f_3 、ブレーキからタイヤの中心までの半径 R_2 とおいて (5.3) は次のようになる。

$$\dot{I}\theta_2'' = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{f_2}) - \frac{f_3 R_2}{R}$$

$(\mathbf{p}\cdot\mathbf{f_2}) = f_2^p$ より

$$\dot{I}\theta_2'' = -f_2^p - \frac{f_3 R_2}{R} \tag{5.5}$$

$\mathbf{p}$ は縦向きの単位ベクトルで、$\mathbf{p}_\alpha$ は前輪の舵角の向きに対する単位ベクトルである。車の運動方程式は車の質量を M として、重心からの位置ベクトル $\mathbf{r_G}''$ とおくと

$$M\mathbf{r_G}'' = (f_1^p + f_2^p)\mathbf{p} + (f_1^q + f_2^q)\mathbf{q} \tag{5.6}$$

単位ベクトル $\mathbf{p}$ について、これを 2 乗したものを微分すると、$\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ は垂直な関係にあり、よって $\mathbf{p}'$ と $\mathbf{q}$ は平行で定数倍を用いた関係になり、同様にして $\mathbf{q}'$ と $\mathbf{p}$ も平行であるので、$\mathbf{p}' = c_1\mathbf{q}, \mathbf{q}' = c_2\mathbf{p}$ のように表せる。

ここで、タイヤと地面の接点の位置ベクトルを $\mathbf{r_1}$ 、$\mathbf{r_2}$ とおくと次のように表せる。

$$\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2} = L\mathbf{p}$$

$$\mathbf{r_1}' - \mathbf{r_2}' = L\mathbf{p}'$$

ここで、$\mathbf{r_1}'$ と $\mathbf{p}_\alpha$ 、$\mathbf{r_2}$ と $\mathbf{p}$ はそれぞれ平行で、$\mathbf{r_1}' = R\theta_1'\mathbf{p}_\alpha$ 、$\mathbf{r_2}' = R\theta_2'\mathbf{p}$ となり、これを上の微分した式に代入して成分の比較をすると次のような関係が求められる。

$$\theta_2' = \theta_1' \cos\theta \tag{5.7}$$

$$R\theta_1' \sin\alpha = Lc_1$$

$$c_1 = \frac{R}{L}\sin\alpha\theta_1' = \gamma\theta_1' \tag{5.8}$$

$$(\frac{R}{L}\sin\alpha = \gamma)$$

また、$\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ とすると $\mathbf{q}$ は $\mathbf{p}$ に対し垂直なので $\mathbf{q} = (p_2, -p_1)$ と表せる。これを用いて $\mathbf{q}', \mathbf{p}'$ の関係を $\mathbf{p}' = c_1\mathbf{q}, C_1 = \gamma\theta_1'$ を用いて求めると最終的に次のような関係になる。

$$\mathbf{q}' = -\gamma\theta_1'\mathbf{p} \tag{5.9}$$

ここで、$\mathbf{r_1}' = R\theta_1'\mathbf{p}_\alpha$ 、$\mathbf{r_2}' = R\theta_2'\mathbf{p}$ を積分したものを $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2} = L\mathbf{p}$ に代入して計算すると

$$\mathbf{r_1} = -\frac{L}{\tan\alpha}\mathbf{q} + L\mathbf{p} + \mathbf{C_1} \tag{5.10}$$

$$\mathbf{r_2} = -\frac{L}{\tan\alpha}\mathbf{q} + \mathbf{C_1} \tag{5.11}$$

これより重心の位置ベクトルは

$$\mathbf{r_G} = (-\frac{L}{\tan\alpha} + k)\mathbf{q} + (L - l)\mathbf{p} + \mathbf{C_1} \tag{5.12}$$

のように求まり、この 2 階微分したものを (5.6) に代入してまとめる。まとめたものを成分比較すると次のようになる。

$$-M(-\frac{L}{\tan\alpha} + k)\gamma\theta_1'' - M\gamma^2(L - l)\theta_1'^2 = f_1^p + f_2^p \tag{5.13}$$

$$-M(-\frac{L}{\tan\alpha} + k)\gamma^2\theta_1'^2 + M\gamma(L - l)\theta_1'' = f_1^q + f_2^q \tag{5.14}$$

また後輪の半径は $L/\tan\alpha$ で表され、車体の回転角と後輪の移動角は等しいので

$$R\theta_2 = \frac{L}{\tan\alpha}\phi$$

(5.7) より

$$\phi = \frac{R}{L}\sin\alpha\theta_1' = \gamma\theta_1' \tag{5.15}$$

したがって車体の回転運動の方程式は

$$\gamma I_G\theta_1'' = kf_1^p + kf_2^p + lf_1^q - (L-l)f_2^q \tag{5.16}$$

最終的に、 車の運動方程式 (5.13)、 (5.14) 車体の回転運動の方程式 (5.16)、 タイヤの回転運動の方程式 (5.4) 、(5.5) を連立させて解き、θ_1'' を解くと

$$\theta_1'' = \frac{LR_2\cos\alpha}{RX_0\sin\alpha}f_3 \tag{5.17}$$

ただし、

$$X_0 = \gamma I_G + M\gamma(-\frac{L}{\tan\alpha} + k)^2 + -M\gamma(L-l)^2 + L\frac{\cos\alpha^2+1}{\sin\alpha}\dot{I}$$

である。

しかしこのとき、k の値はこれはカーブ時の車体の傾きにより変化する値であり定数としては考えにくい。そこで 4 輪にした場合で考えてみる。

5.4 4 輪モデルの場合

4 輪モデルでの図は以下のように表し、これは 2 輪モデルが 2 つあるようなものとして、各車輪は自由に動くものとして、重心の位置は左右の中心にあるものとする。このとき、外側の舵角 α は内側の舵角 β より大きく、軌道半径は外側の方が大きいことがいえる。

これについて、 2 輪モデルと同じようなやり方で解析を行う。タイヤの回転運動の方程式は、2 輪と同じように内積で表して位置ベクトルで考えて後輪にかかるブレーキのモーメントを m_2 とおくと

$$\dot{I}\theta_1'' = -f_1^p\cos\alpha - f_1^q\sin\alpha$$

$$\dot{I}\theta_2'' = -f_2^p - \frac{m_2}{R}$$

$$\dot{I}\theta_3'' = -f_3^p\cos\beta - f_3^q\sin\beta$$

$$\dot{I}\theta_4'' = -f_4^p - \frac{m_2}{R}$$

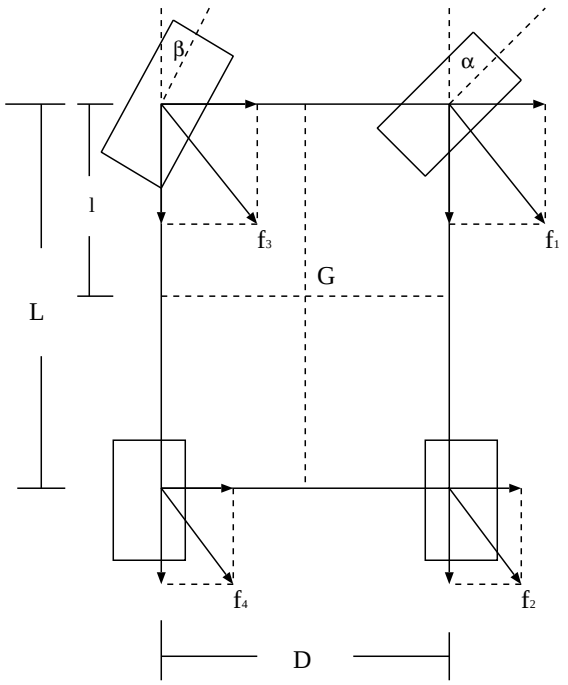


Fig. 5.5 カーブ時の 4 輪モデル

$\mathbf{r_1}' = R\theta_1'\mathbf{p}_\alpha$ 、$\mathbf{r_2}' = R\theta_2'\mathbf{p}$ のような関係を 4 輪モデルに適用させて、$\mathbf{r_1}' - \mathbf{r_2}' = L\mathbf{p}'$ 、$\mathbf{r_3}' - \mathbf{r_4}' = L\mathbf{p}'$ の関係から

$$\theta_2' = \theta_1' \cos\theta$$

$$\theta_3' = \theta_4' \cos\theta$$

$$\frac{R}{L}\sin\alpha\theta_1' = \frac{R}{L}\sin\beta\theta_3'$$

したがって、タイヤの回転運動の方程式は

$$\dot{I}\theta_1'' = -f_1^p \cos\alpha - f_1^q \sin\alpha \tag{5.18}$$

$$\dot{I}\theta_1'' \cos\alpha = -f_2^p - \frac{m_2}{R} \tag{5.19}$$

$$\dot{I}\theta_1''\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = -f_3^p \cos\beta - f_3^q \sin\beta \tag{5.20}$$

$$\dot{I}\theta_1''\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = -f_4^p - \frac{m_2}{R} \tag{5.21}$$

車体の運動方程式は

$$M\gamma(\frac{L}{\tan\alpha} + \frac{D}{2})\theta_1'' - M\gamma^2(L-l)\theta_1'^2 = f_1^p + f_2^p + f_3^p + f_4^p \tag{5.22}$$

$$M\gamma(\frac{L}{\tan\alpha}+\frac{D}{2})\theta_1'^2 - M\gamma(L-l)\theta_1'' = f_1^q + f_2^q + f_3^q + f_4^q \tag{5.23}$$

車体の回転の運動方程式は $\phi = \gamma\theta_1$ から

$$\gamma I_G\theta_1'' = \frac{D}{2}(-f_1^p - f_2^p + f_3^p + f_4^p) + l(f_1^q + f_3^q) - (L-l)(f_2^q + f_4^q) \tag{5.24}$$

ここで、車体の回転は 3 方向あるので式は本来もう 2 つあり、車体の運動方程式はベクトル表示だと元々は 1 本の式で、全部で式は 7 つあるのだが、変数は 9 つである。これが不定要素にあたるが、今回これについては考えない。

各方程式を連立させて解くと次のようになる。

$$\theta_1'' = \frac{Lm_2}{RX_1}(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta})$$

$$\theta_1'' = \frac{Lm_2 f_3'}{RX_1} \tag{5.25}$$

ただし、

$$f_3' = \frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}$$

$$X_1 = \gamma I_G + M\gamma L^2\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\sin\alpha^2\sin\beta^2} + -M\gamma(L-l)^2 + 2IL\gamma(\frac{1}{\tan\alpha^2}+\frac{1}{\tan\beta^2}+1)$$

である

5.5 4 輪の不静定問題

車両の運動解析については、一般には 2 輪モデルというものがあり、4 輪を簡略化したものでこれがよく使われる。4 輪モデルで考える場合、不静定問題が生じる。これは静力学でのつりあいを考える場合おきる。静力学では荷重が 3 点であれば x, y 軸方向のモーメントと z 方向のつりあいの条件とあわせて解けるが、4 点では接地面の状態などで 3 点だけでつりあいを保つことがありえるので、つりあいの条件だけでは求められない。これと同じく、4 輪モデルも路面の状況などで変化するため、不定要素がある。

この不定要素について考えなければいけないのは、スリップしない条件であるが、カーブの時のスリップ条件は複雑になり不定要素もからむためこれを求めるのは難しく、これは考えないものとしてすすめる。

5.6 4 輪の場合の停止距離モデル

停止距離は空走距離 + 制動距離で求められる。制動距離は車輪の軌道円の半径と制動距離分の移動角の積である。車体の回転角と前輪の移動角は等しい。車輪の軌道円の半径は後輪 2 輪の軌道円の半径の平均値であるとし、$\dot{R}$ とおく。制動距離 d_1 とおくと

$$d_1 = \dot{R}\phi = \gamma\dot{R}\theta_1 \tag{5.26}$$

θ_1 は θ_1'' の時間についての積分により求める。$\theta_1'' = c_0$ とおいて積分すると

$$\int \theta_1'' dt = c_0 t + C_1$$

速度 v は $R\theta_1'$ で表され、$t = 0$ のときは $\theta_1(0)' = v_0/R$ であり、これが積分定数となる。 停止したときの時間を t_1 として、このときの速度は 0 であるから、

$$0 = c_0 t_1 + \frac{v_0}{R}$$

$$t_1 = -\frac{v_0}{c_0 R}$$

となる。θ_1' をさらに積分したものにこれを代入すると

$$\theta_1(t_1) = -\frac{v_0^2}{2c_0 R^2}$$

となり、制動距離 d_1 は、

$$d_1 = \gamma \dot{R} \theta_1 = -\frac{\gamma \dot{R} v_0^2}{2c_0 R^2}$$

となる。これらのことより、停止距離についてまとめると、カーブのときの停止距離 d は

$$d = t_0 v_0 - \frac{\gamma \dot{R} v_0^2}{2c_0 R^2}$$

$$= -\frac{\dot{R}\gamma X_1}{2LRm_2 f_3'} v_0^2$$

ここで、γX_1 を計算し、$1/\tan\beta = D/L + 1/\tan\alpha$ を用いて $\gamma X_1 = X_2$ と表す。X_2 は

$$X_2 = \gamma^2 I_G + M\gamma^2 (L-l)^2 + MR^2 (\frac{D}{L}\sin\alpha + 2\cos\alpha)^2 + +2I\{1 + (\frac{D}{L}\sin\alpha + \cos\alpha)^2\}$$

である
θ_1'' は負の加速なので、次のように表せる。

$$d = t_0 v_0 + \frac{\dot{R} X_2}{2LRm_2 f_3'} v_0^2$$

また、

$$\dot{R} = \frac{L}{2}(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta})$$

$$f_3' = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}$$

から停止距離は次のように求められる。

$$d = t_0 v_0 + \frac{X_2}{4Rm_2} v_0^2 \tag{5.27}$$

を v_0 についての 2 次方程式とみなして解の公式を用いて解くと形自体は直線、坂道と同じようになる。違うのは直線、坂道の μ の部分で、それは U とおくと

$$U = \frac{2Rm_2}{X_2}$$

となり、速度は次のように求められる。

$$v = -Ut_0 + \sqrt{U^2 t_0^2 - 2Ud} \tag{5.28}$$

を用いる。カーブでは速度は密度と舵角によるので、保存則方程式は

$$\rho_t + q(\rho, \alpha)$$

$$q(\rho, \alpha) = \rho v(\rho, \alpha)$$

$$\alpha = \alpha(x)$$

となり、道路の形状を反映した交通流の流体モデルが得られる。

5.7 最高速度制限

まず、前後から見た図を以下に示す。ここでは遠心力との関係について考える。半径 r のカーブを曲がっているものとする。

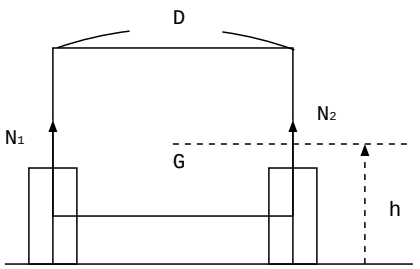


Fig. 5.6 カーブ時の前後からの図

このとき

$$N_1 + N_2 = mg$$

また両方のタイヤが横方向に及ぼす摩擦を F として車体の回転運動の式をたてると (h は重心 G からの高さ)

$$\frac{D}{2}N_1 = \frac{D}{2}N_2 + Fh$$

このとき、遠心力と横方向の摩擦がつりあうことで安定した運転ができるので、$F = mv^2/r$ となるので車体の回転運動の式に代入して

$$N_1 = N_2 + \frac{2mv^2h}{rD}$$

これを $N_1 + N_2 = mg$ に代入すると

$$N_1 = \frac{mv^2h}{rD} + \frac{1}{2}mg$$

$$N_2 = \frac{mv^2h}{rD} - \frac{1}{2}mg$$

となる。カーブのときには一方のほうに荷重がいき、この場合 N_1 のほうに曲がっているとする。このとき、N_2 が 0 になってしまうと横転が発生してしまうので

$$\frac{mv^2h}{rD} - \frac{1}{2}mg > 0$$

$$v < \sqrt{\frac{grD}{2h}} \tag{5.29}$$

のような速度が横転しないための条件である。

6　数値計算

停止距離と横転しないための速度条件を用いて、Lax-Friedrichs 法を用いた数値計算を行う。これは保存則方程式 $\rho_t + q(\rho,\alpha)_x = 0$ を

$$\frac{\rho(x,t+\Delta t) - \frac{\rho(x+\Delta x,t)+\rho(x-\Delta x,t)}{2}}{\Delta t}$$

$$+\frac{q(\rho(x+\Delta x,t),\alpha(x+\Delta x)) - q(\rho(x-\Delta x,t),\alpha(x-\Delta x))}{2\Delta x} = 0$$

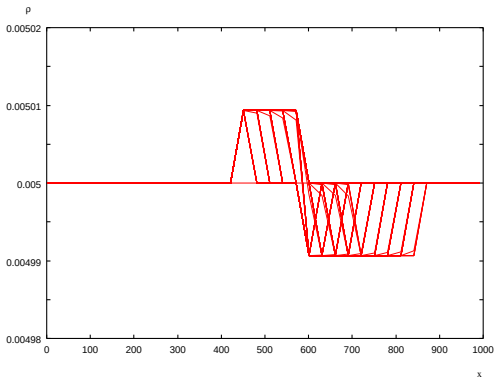
の形で近似するものである。

道路のモデルは距離 1000 [m] で 450 ~ 600 [m] の間がカーブであるとし、カーブの半径 100 [m] とする。分割数 1000 ($\Delta x = 1$) 、初期密度 $\rho(x,0)$ を 0.005 [台数/m] で与え、時間が 60 [s] になるまで計算を繰り返す。

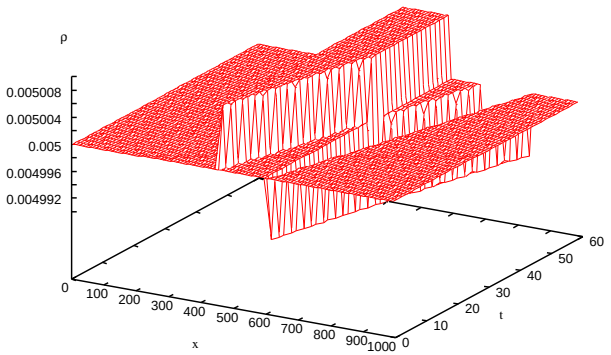
車のモデルの各値は以下のように設定する。

車の長さ ... 4.0 [m]　　タイヤ半径 ... 0.4 [m]
重量 ... 1500 [kg]　　タイヤの慣性モーメント ... 0.72 [Nm]
車の幅 ... 1.5 [m]　　車体の慣性モーメント ... 4800 [Nms^2]
重心高さ ... 0.5 [m]　　ブレーキが及ぼすモーメント ... 2360 [Nm]
重心から前輪までの距離 ... 4.0 [m]

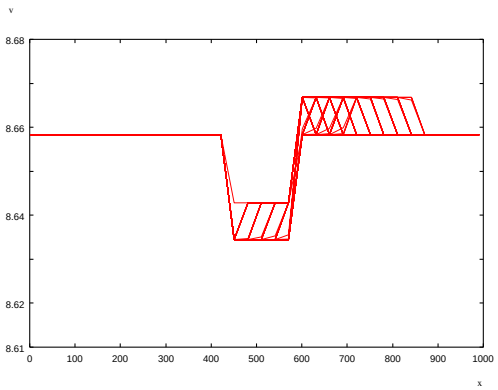
この結果を Fig.6.1 に示す。カーブの開始地点あたりで密度が上がっているので、カーブに入る時は車間距離が短くなり速度はそれに応じて下がることがいえる。またカーブを出てから一時的に密度は下がっているのでここでは速度が上がることがいえる。また (c)、(d) より曲線内では速度が下がっていることが分かる。



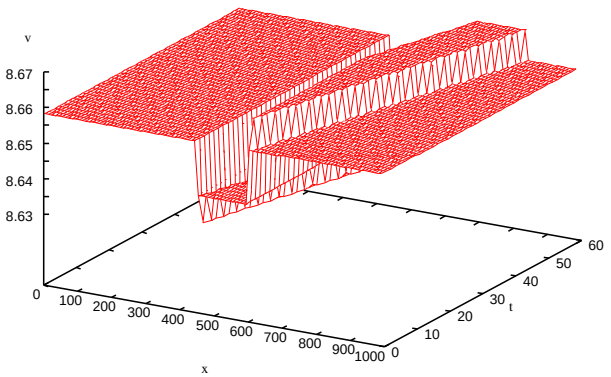
(a)2 次元



(b)3 次元



(c) 位置と速度の関係



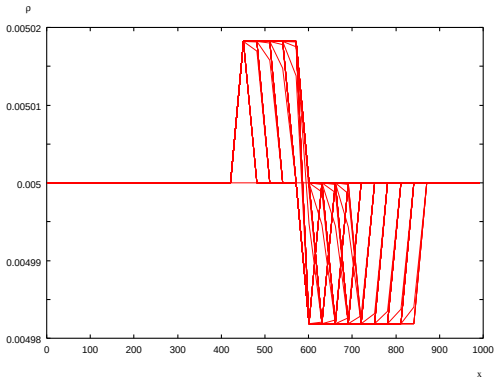
(d) 位置と速度の関係 (3 次元)

Fig. 6.1 r=100[m] のカーブでの密度

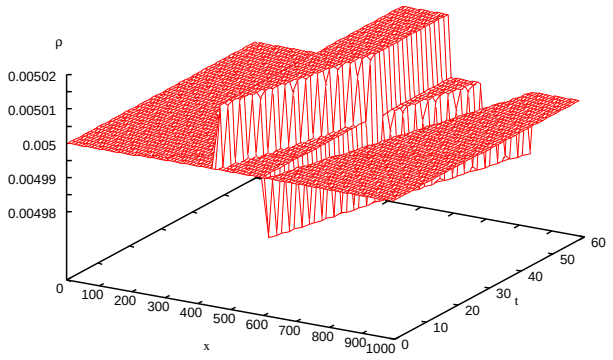
実際でも曲がる時はブレーキをかけ速度を落とし、直線に出てからは速度を上げていくのでこの結果は妥当であることが言えるだろう。

次に急なカーブについて計算する。カーブでは r の値が小さい程急になる。 $r = 50$[m] とした場合の計算結果を Fig.6.2 に示す。

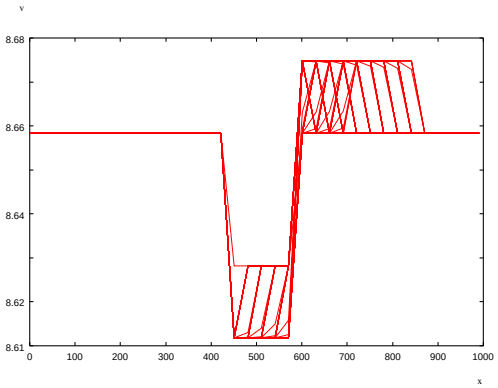
グラフの形は同じであるが Fig.6.1 よりも密度の値が大きく、速度も曲線内ではより大きく減っている。実際でも急であるほどそういった対処をとるのでこれも妥当であるといえるだろう。



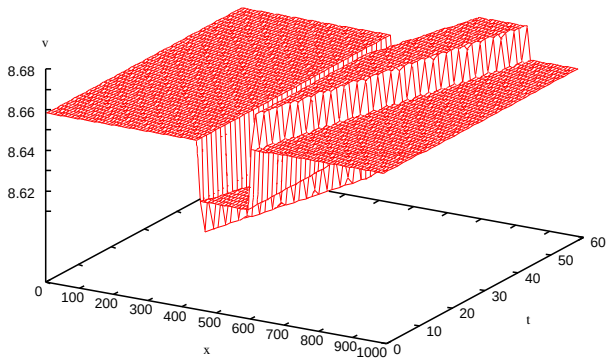
(a)2 次元



(b)3 次元



(c) 位置と速度の関係 (2 次元)



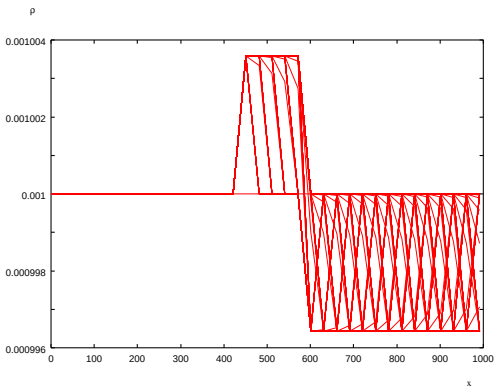
(d) 位置と速度の関係 (3 次元)

Fig. 6.2 r=50[m] のカーブでの密度

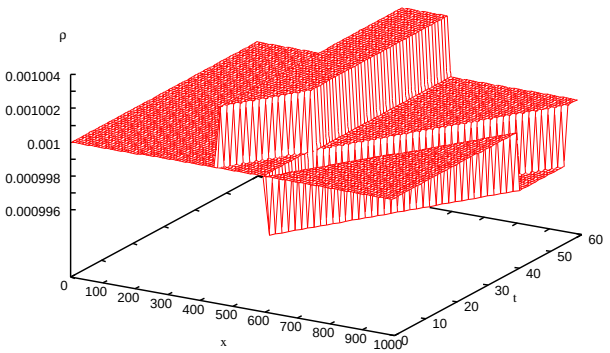
次に、$r = 50$ [m] で初期密度が 0.001 のような場合を Fig.6.3 に示す。この場合では密度の変化が他のものに比べ大きく、特に込み合う度合が大きくなっていて、カーブを抜けた後の速度は大きいまま連続している。また Fig.6.2 よりも大きい値になっている。これは密度が小さい故に進入速度が大きくその分曲線部で渋滞のような状況になりやすいことが想定される。

次に、速度が一定のような場合で数値計算を行う。最高速度条件では $r = 50$ [m] ではおよそ 97 km/h であり、これ以下のものとこれ以上のものについて時間 6 [s] まで計算を繰り返し考察する。

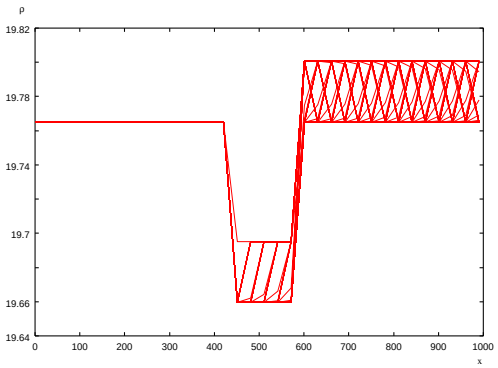
速度を 70 km/h としたときのグラフを Fig.6.4 に示す。これは密度が一定の場合とは逆になる。この場合カーブに入るときは一時的に速度が下がるため密度は上がり、カーブ



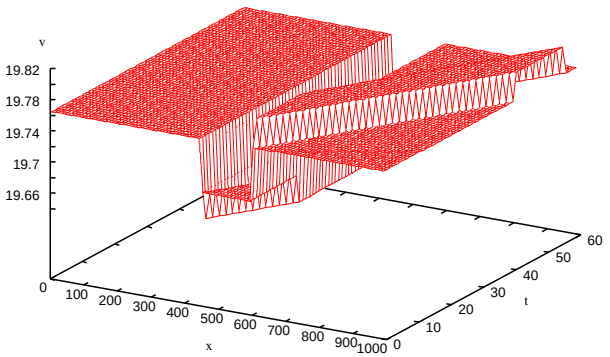
(a)2 次元



(b)3 次元



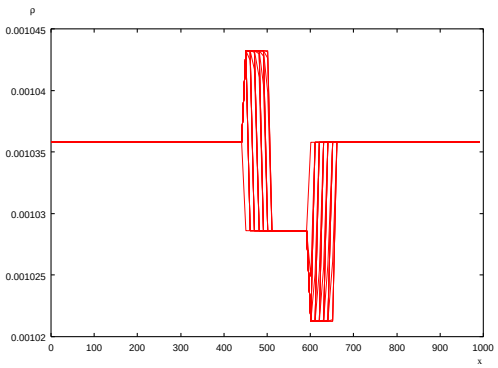
(c) 位置と速度の関係



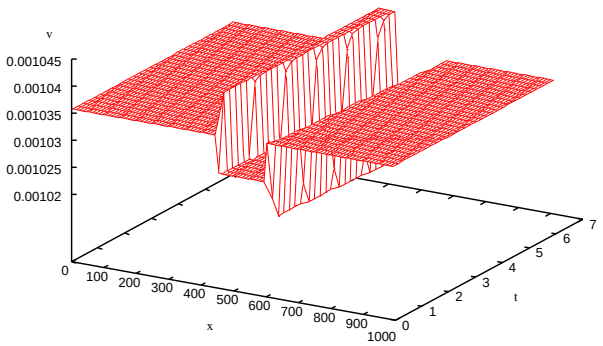
(d) 位置と速度の関係 (3 次元)

Fig. 6.3 r=50[m] $\rho(x,0) = 0.001$ のカーブでの密度

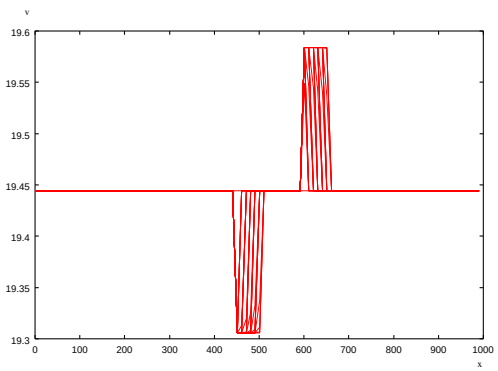
から出るときは密度が下がるのに応じて速度が上がっている。またカーブ内でも一定の速度であるためそれに応じて密度は下がっている。



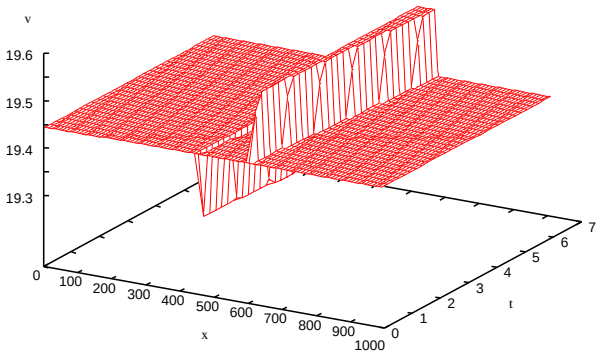
(a)2 次元



(b)3 次元



(c) 位置と速度の関係



(d) 位置と速度の関係 (3 次元)

Fig. 6.4 r=50[m] v=70km/h のカーブでの密度

次に速度制限をこえてしまう 100km/h のような場合だが、これは安定条件の設定がうまく合わず不安定性がグラフに表れカーブの終端あたりで振動が生じてしまった。今回この考察については時間がなかったためできなかった。カーブの終端の図を Fig.6.5 に示す。

7 まとめ

停止距離モデルを用いた流体モデルでのカーブにおける交通流のモデル化を行うにあたって、従来の動摩擦係数を用いたモデルではなく、タイヤの回転運動、車体にかかるモーメントのつりあい、垂直抗力から車の運動そのものをモデル化し、これを静摩擦係数によるブレーキをかけたときのスリップしない条件で、直線でのモデル化を行った。これをカーブについて考えるためカーブでの車の運動を考察した結果、カーブでは摩擦が縦方

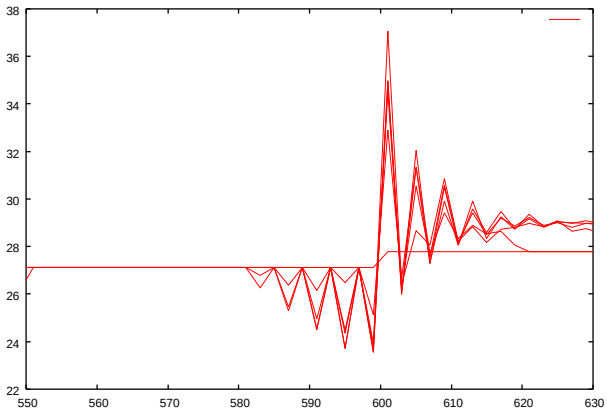


Fig. 6.5 r=50[m] v=100km/h のカーブ終端の密度

向だけではなく横方向にも働きこの合力で表されることが分かった。

しかしカーブでの車の運動は直線のように真横から見ただけでなく前後、上からと 3 方向にモーメントがかかり、遠心力やスリップ角など細かい要素もあり、現実に近いモデルを想定するのは難しいことが分かった。また不静定問題があるためスリップしない条件をとりいれることができず、これを考慮せず直線で求めたブレーキのモデルがとりいれられず、横転しないための最高速度制限のみで考えカーブでの車の運動をモデル化し、これとタイヤの慣性モーメント等の一般的な数値を数値計算のプログラム内に入れこれを計算した。

数値計算の結果としては妥当な結果が得られ、カーブに入るときに一時的に密度が上がり、出てから密度が下がり速度も上がっていくグラフになり、実際の現象に対応してることがいえるが、速度制限をこえたものに関しては解が不安定になってしまい、時間がなかったためこれは今後の課題である。

今回用いたモデルは遠心力、スリップ角が発生しない低速時のアッカーマン型ステアリングであり、実際のカーブは舵角ではなくスリップ角によるものなので、スリップ角を考慮したものをできればとりいれたかった。スリップ角には一定以上の舵角に対して減少する性質があり、これにより車の軌道も変わってくる。これを考慮したモデルには簡略化した 2 輪モデルが一般的に使われているが、等速が前提のものがほとんどで、今回のような加減速におけるモデルはあまりなかった。

また 4 輪における不静定問題を考える場合はタイヤの弾性を考慮して考えなければならず、より現実に近いモデルにするにはこれらの要素をとりいれなければならないだろう。

参考文献

[1] 西田 匡佑： 停止距離から導かれる交通流の数学モデルとその数値解析, 新潟工科大学情報電子工学科卒業論文,1999

[2] 鈴木 保弘： 停止距離から導かれる交通流の数学モデルとその数値解析, 新潟工科大学情報電子工学科卒業論文,2000

[3] 運動性能とタイヤ性能： http://www4.justnet.ne.jp/~makoti/enginer00.htm

[4] タイヤの特性とドライビング： http://www.honda.co.jp/S2000/style/event/stepup/stepup5.html

[5] 自動車力学：景山克三、景山一郎著 理工図書 1984

[6] 基礎自動車工学 後期編：近藤 政市著 養賢堂 1965

[7] 自動車工学 ：樋口 健二著 山海堂 1988