衝撃波による非粘性バーガース方程式の差分法の比較

平成 13 年 2 月 5 日

情報電子工学科 竹野研究室
渡邉 伸征

目 次

1 はじめに **1**

2 本研究で扱う方程式と差分法 **1**

2.1 Burgers 方程式 1

2.2 差分法 2

2.3 Lax-Friedrics 法 3

2.4 安定条件 4

2.4.1 安定条件 5

2.4.2 Lax-Friedrics 法の安定条件 7

2.5 Lax-Wendroff 法 9

2.5.1 Richtmyer 法 12

2.5.2 MacCormack 法 14

3 衝撃波 **16**

4 実験と考察 **16**

4.1 衝撃波の傾きでの比較 16

4.2 傾きの最小値での比較 21

4.3 衝撃波の幅での比較 27

5 まとめ **34**

参考文献 **35**

概要

保存則方程式の一次精度と二次精度の差分法において、短時間計算の差分の精度については色々と知られているが、長時間計算後の差分の精度については昨年の木原氏の研究以外にはあまり良く知られてはいない。ただし、その研究では、一次精度と二次精度の差分の比較を見た目でしか行っていない。そこで、本稿では周期的外力を持つ非粘性 Burgers 方程式で、長時間計算後の一次精度と二次精度の差分法の比較を、見た目ではなく数値的に行うために必要な比較方法について考察する。比較する差分法は、その研究でも取り上げられている一次精度の Lax-Friedrics 法、二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法 (前進差分, 後退差分) である。それらの分割数と CFL 条件の値を変化させた数値計算結果から、一次精度差分のどの程度の分割数や CFL の値が、二次精度差分のどの程度の分割数や CFL の値にあたるのかを対応付けるために、衝撃波に注目したいくつかの比較方法を検討する。

1　はじめに

保存則方程式の一次精度と二次精度の差分法において、短時間計算の差分の精度については色々と知られているが、長時間計算後の差分の精度については昨年の木原氏[1)]の研究以外にはあまり良く知られてはいない。また、木原氏の研究では、グラフを目で見ることで一次精度と二次精度の差分の比較を行っているが、数値的な比較は行われていない。

木原氏の研究のグラフから、長時間計算後はどの差分法でも、分割数を大きくしていく、つまり精度を上げていくと、衝撃波の傾きの絶対値が大きくなってくることが分かる。そのことから、精度と衝撃波の傾きの関係を考えることで、それぞれの差分法の精度の数値的な比較ができるのではないかと考えられる。

そこで、長時間計算後の一次精度と二次精度の差分を分割数と安定条件の変化による衝撃波の変化に注目し、対応付けできる比較方法を考察しようというのが本研究の目的である。

本稿では、第 2 章で本研究で扱う方程式と差分法、第 3 章で衝撃波について記述し、4.1 節で衝撃波の傾き、4.2 節で傾きの最小値、4.3 節で衝撃波の幅での比較方法と考察について述べる。

2　本研究で扱う方程式と差分法

2.1　Burgers 方程式

流体運動を支配する方程式に Navier-Stokes の方程式 (流体運動を支配する偏微分方程式) があるが、それを簡単にしたものに Burgers 方程式がある。まず、1 次元の Navier-Stokes の方程式は

$$\underset{\text{移流項}}{\underset{\uparrow}{\frac{\partial u}{\partial t}\ +u\frac{\partial u}{\partial x}}}\ =\ \underset{\text{圧力項}}{\underset{\uparrow}{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}}\ \underset{\text{拡散項}}{\underset{\uparrow}{+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}$$

$$\Big(\rho(>0):\text{流体の密度、}u(>0):\text{流体の速度、}p(>0):\text{圧力、}\nu(>0):\text{粘性係数}\Big)$$

と記述できる。この方程式の圧力項を省略したのが Burgers 方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

また、この Burgers 方程式の拡散項を無視したもの

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2.1}$$

を非粘性 Burgers 方程式という。この方程式は、u が滑らかな関数の場合、

$$u_t+\left(\frac{u^2}{2}\right)_x=0 \tag{2.2}$$

と表すこともできる。

2.2 差分法

まず、簡単な差分法を考えてみる。差分法とは一言でいえば微分方程式を差分方程式におきかえて解く方法を指す。微分方程式に対応する差分方程式は、微分方程式に含まれる微分商を差分商におきかえる (差分近似を行う) ことにより機械的に作ることができる。

1 変数関数 $u(x)$ は、テイラー展開によって差分商を求めていくと、

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) \qquad \text{(前進差分)} \tag{2.3}$$

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h) \qquad \text{(後退差分)} \tag{2.4}$$

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2) \qquad \text{(中心差分)} \tag{2.5}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2) \tag{2.6}$$

などとなる。ここで、$O(h)$ は h が小さいとき、およそ h のオーダーの大きさになることを示す。また、1 階導関数、2 階導関数の近似はこれだけではなく、無数につくることができる。しかしこれらの近似が一般にもっともよく用いられる。

2 変数関数 $u(x,t)$ についても 1 変数関数のときと同様に、テイラー展開によって差分商を求めることができるが、x に関する偏微分は t を一定に保った微分であり、t に関する偏微分は x を一定に保った微分であるので、式 (2.3),(2.4),(2.5) は、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \dfrac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} + O(h) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} + O(k) \end{cases} \qquad \text{(前進差分)} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \dfrac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} + O(h) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{u(x,t) - u(x,t-k)}{k} + O(k) \end{cases} \qquad \text{(後退差分)} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \dfrac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} + O(h^2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{u(x,t+k) - u(x,t-k)}{2k} + O(k^2) \end{cases} \qquad \text{(中心差分)} \tag{2.9}$$

とすることができる。また、式 (2.6) も同様に、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2) \tag{2.10}$$

とすることができる。

これらのように、差分の誤差が h のオーダーのときを一次精度、h^2 のオーダーのときを二次精度の差分と言う。

2.3 Lax-Friedrics 法

ここで、非粘性 Burgers 方程式 (2.2) の初期値・境界値問題

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & (0 < x < 1) \\ u(0,t) = u(1,t) & (t > 0) \end{cases} \tag{2.11}$$

を Lax-Friedrics 法で考えることとする。

方程式を解くべき領域は Fig.2.1 に示すような領域となる。この領域を x 方向に 1 辺

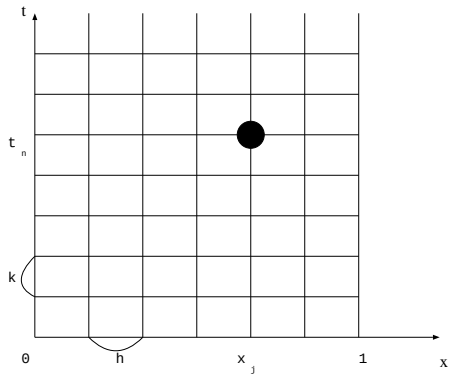


Fig. 2.1 一方に無限にのびた 2 次元格子

の長さ h 、t 方向に k の長方形の格子に分割してみる。ただし x 方向の格子数は J 、すなわち $Jh = 1$ とする。そして左下の格子番号が $(0,0)$ 、右下の格子番号が $(J,0)$ となるような 2 次元の格子番号をつける。

このとき格子番号 (j,n) の点の座標 (jh, nk) を (x_j, t_n) 、そこでの u の近似値を

$$u_j^n \sim u(x_j, t_n)$$

と表すことにする。

Lax-Friedrics 法とは、時間微分を

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \sim \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} \sim \frac{u(x,t+k) - \dfrac{u(x+h,t) + u(x-h,t)}{2}}{k}$$

と考え、空間微分を普通の中心差分としたものである。また、上式を漸化式にすると

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{u_j^{n+1} - \dfrac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{k} \tag{2.12}$$

のようになる。

ここで、式 (2.12) と

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

を式 (2.1) に用いると、

$$\frac{u_j^{n+1} - \dfrac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{k} + \frac{\dfrac{{u_{j+1}^n}^2}{2} - \dfrac{{u_{j-1}^n}^2}{2}}{2h} = 0$$

これを u_j^{n+1} について解くと、

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{k}{4h}\{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2\} \tag{2.13}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, J)$$

Lax-Friedrics 法を図示すると Fig.2.2 のようになる。なお、Fig.2.2 では J の値を 4 とした。$t = 0$ から k (時間増分) 進めると、u_1^0 と u_3^0 から u_2^1 を求めるように、 2 点により

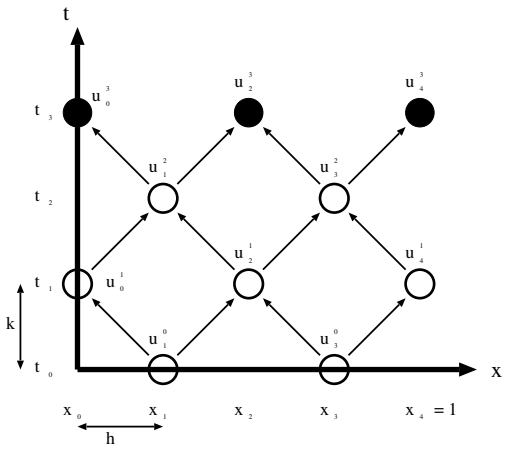


Fig. 2.2 Lax-Friedrics 法

次の点を求める。しかし、u_0^1 は u_1^0 の 1 点しかないのでこのままでは u_0^1 を求めることができないが、その境界部分の計算については、昨年の木原氏の方法 [1)] により、$u_{-1}^0 = u_3^0$ として計算する。また、u_4^1 についても、同様に $u_5^0 = u_1^0$ として計算する。次に k 進める $(t = 2k)$ と u_0^1 と u_2^1 から u_1^2 、u_2^1 と u_4^1 から u_3^2 を求める。これを繰り返して u_j^n の値を求めていく。

2.4 安定条件

数値解析を行う際には近似解の安定性を考慮する必要がある。安定性は、差分の方法、パラメータの取り方等によって変わるが、線形の方程式の差分に関してはフーリエ変換を使って調べることができる。しかし、非線形の方程式の場合は、線形の方程式で求めた条件から推測したものを安定条件と呼んでいるため、必ずしも厳密な条件というわけではない。

なお、フーリエ変換については基本的なことだけ以下で触れる。
$\varphi(x)$ に対して ξ の関数 $\widehat{\varphi}(\xi)$ を対応させて

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\varphi(x)dx \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{2.14}$$

とすることをフーリエ変換と呼ぶ。また $\widehat{\varphi}(\xi)$ は、

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi](\xi) \quad \text{または} \quad \widehat{\varphi} = \mathcal{F}[\varphi]$$

とも書ける。
この変換は h を定数とすると、

$$\mathcal{F}[\varphi(x+h)] = (\varphi(x+h))\widehat{} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\varphi(x+h)dx$$

ここで $x+h=y$ と置くと、

$$\begin{aligned}(\varphi(x+h))\widehat{} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi+ih\xi}\varphi(y)dy \\ &= e^{ih\xi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi}\varphi(y)dy \\ &= e^{ih\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\end{aligned} \tag{2.15}$$

という性質がある。

2.4.1 安定条件

Burgers 方程式を含む、一般の非線形単独保存則方程式

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad (0 < x < 1, t > 0)$$

は $f(u)_x = f'(u)u_x$ であることを使い

$$u_t + f'(u)u_x = 0$$

とすることができるが、まずこの u_x の係数 $f'(u)$ を定数 a と置いた線形の方程式

$$u_t + au_x = 0 \tag{2.16}$$

に対する差分の安定条件を考える。式 (2.16) の差分化を u_t, u_x それぞれに、前進差分の式 (2.7) を用いて、

$$\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} + a\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} = 0 \tag{2.17}$$

と考える。次に式 (2.17) を x に関してフーリエ変換する。フーリエ変換は線形なので、

$$\frac{\widehat{u}(\xi,t+k)-\widehat{u}(\xi,t)}{k} + a\frac{(u(x+h,t))\widehat{}-\widehat{u}(\xi,t)}{h} = 0 \tag{2.18}$$

となる。ここで $\widehat{u}(\xi,t)$ は x に関してのフーリエ変換なので、式 (2.14) より、

$$\widehat{u}(\xi,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\xi x}dx \tag{2.19}$$

である。また、式 (2.15) より、

$$(u(x+h,t))\widehat{\ }=e^{i\xi h}\widehat{u}(\xi,t) \tag{2.20}$$

となるので、式 (2.18) は式 (2.19),(2.20) より、

$$\frac{\widehat{u}(\xi,t+k)-\widehat{u}(\xi,t)}{k}+a\frac{e^{i\xi h}\widehat{u}(\xi,t)-\widehat{u}(\xi,t)}{h}=0$$

となる。よって、

$$\begin{cases}\widehat{u}(\xi,t+k)=A\widehat{u}(\xi,t)\\ \\ A=1-a\dfrac{k}{h}(e^{i\xi h}-1)\end{cases} \tag{2.21}$$

と置き換えることができる。A は t に関係しないので、$t=mk$ のときの $\widehat{u}(\xi,t)$ を $\widehat{u}(\xi,0)$ を用いて表せば、

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi,mk) &= A\widehat{u}(\xi,(m-1)k)=A^2\widehat{u}(\xi,(m-2)k)=\cdots\\ &= A^m\widehat{u}(\xi,0)\end{aligned}$$

となることが分かる。複素数 A^m は、

$|A|>1\Longrightarrow m\to\infty$ のとき A^mは振動しながら発散

$|A|=1\Longrightarrow m\to\infty$ のとき A^mは単位円上を動く

$|A|<1\Longrightarrow m\to\infty$ のとき $A^m\to 0$ に収束

となる。よって、

$|A|>1\Longrightarrow$ 不安定

$|A|\leq 1\Longrightarrow$ 安定

となることが分かる。

次の 2 式

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　　(オイラーの公式)

$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$　　(複素数の絶対値)

を使って、$|A| \leq 1$ (安定) となる条件を調べる。

$$\begin{aligned} A &= 1 - a\frac{k}{h}(e^{i\xi h}) \\ &= 1 - \mu(\cos\theta + i\sin\theta - 1) \qquad \left(\mu = a\frac{k}{h}, \quad \theta = \xi h \text{ とする}\right) \\ &= 1 + \mu - \mu\cos\theta - i\mu\sin\theta \end{aligned}$$

となるので、$|A|^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned} |A|^2 &= (1 + \mu - \mu\cos\theta)^2 + (\mu\sin\theta)^2 \\ &= (1+\mu)^2 - 2\mu(1+\mu)\cos\theta + \mu^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= 1 + 2\mu(1+\mu) - 2\mu(1+\mu)\cos\theta \end{aligned}$$

となる。次に $|A|^2 - 1$ の形にすると、

$$\begin{aligned} |A|^2 - 1 &= 2\mu(1+\mu) - 2\mu(1+\mu)\cos\theta \\ &= 2\mu(1+\mu)(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

となるが、安定条件

$$|A| \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad |A|^2 - 1 \leq 0$$

となるのは、$1 - \cos\theta \geq 0$ より

$$2\mu(1+\mu) \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad -1 \leq \mu \leq 0$$

の時であることが分かる。$\mu = ak/h$ であったので、

$$-1 \leq a\frac{k}{h} \leq 0$$

の時に安定となる。これは、a が負、k, h が同じくらいの大きさでなければならないことを表している。このように k, h に関して不等式で表される条件のことを **CFL(Courant-Friedrics-Lewy)** 条件と呼ぶ。

2.4.2 Lax-Friedrics 法の安定条件

ここで、Lax-Friedrics 法の安定条件を考えてみる。

$$\frac{u(x,t+k) - \dfrac{u(x+h,t) + u(x-h,t)}{2}}{k} + a\frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} = 0 \qquad (2.22)$$

式 (2.22) を x に関してフーリエ変換すると、

$$\frac{\widehat{u}(\xi,t+k) - \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\widehat{u}(\xi,t)}{k} + a\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2h}\widehat{u}(\xi,t) = 0 \qquad (\theta = \xi h)$$

となり、これを $\widehat{u}(\xi, t+k)$ について解くと、

$$\widehat{u}(\xi, t+k) = \left(\cos\theta - ia\frac{k}{h}\sin\theta\right)\widehat{u}(\xi, t)$$

よって、

$$A = \cos\theta - i\mu\sin\theta \qquad \left(\mu = a\frac{k}{h}\right)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} |A|^2 - 1 &= \cos^2\theta + \mu^2\sin^2\theta - 1 \\ &= (\mu^2 - 1)\sin^2\theta \leq 0 \end{aligned}$$

より、$0 \leq \sin^2\theta \leq 1$ なので,、

$$\mu^2 \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad |\mu| \leq 1$$

$\mu = ak/h$ 、$k > 0$ 、$h > 0$ だったので、

$$|a|\frac{k}{h} \leq 1 \tag{2.23}$$

が式 (2.22) の安定条件となる。

ここまでは線形の話だったので、非線形の場合について考える。

$$a = f'(u)$$

と考えると式 (2.16) は、

$$\frac{u(x,t+k) - \dfrac{u(x+h,t)+u(x-h,t)}{2}}{k} + f'(u(x,t))\frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h} = 0 \tag{2.24}$$

となるが、Lax-Friedrics 法では、

$$\frac{u(x,t+k) - \dfrac{u(x+h,t)+u(x-h,t)}{2}}{k} + \frac{f(u(x+h,t)) - f(u(x-h,t))}{2h} = 0 \tag{2.25}$$

と考える。しかし、平均値の定理から、

$$f(u(x+h,t)) - f(u(x-h,t)) = f'(\tilde{u})\{u(x+h,t) - u(x-h,t)\}$$
$$\left(\tilde{u}\text{は } u(x+h,t) \text{ と } u(x-h,t) \text{ の間の値}\right)$$

とできるので、式 (2.25) と式 (2.24) はほぼ等しく見ることができる。しかし、式 (2.25) が実際の数値計算で用いられるのは、式 (2.25) は保存性を持った形だからである。結局、式 (2.25) の 安定条件は線形のときと同じ

$$|f'(u(x,t))|\frac{k}{h} \leq 1$$

と考えることができる。

2.5 Lax-Wendroff 法

Lax-Friedrics 法では、時間増分 k に関して一次精度まで考慮してきたが、Lax-Wendroff 法とは、時間増分 k に関して二次精度まで考慮する方法である。まず、$u(x,t+k)$ のテイラー展開

$$\begin{aligned} u(x,t+k) &= u(x,t)+\frac{k}{1!}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,t)+\cdots \\ &= u(x,t)+k\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+O(k^3) \end{aligned} \tag{2.26}$$

のように、u_t を二次の精度で近似するため u を三次の精度で展開し、その式に、線形の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

を

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= -\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} \\ &= -a\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} \\ &= -a\frac{\partial}{\partial x}\left(-a\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

とした 2 式を代入すると、

$$u(x,t+k)=u(x,t)-ka\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)+\frac{k^2}{2}a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+O(k^3) \tag{2.27}$$

となる。次に、式 (2.27) の右辺を空間中心差分で近似すると、

$$\begin{aligned} u(x,t+k) = u(x,t) &- a\frac{k}{2h}\{u(x+h,t)-u(x-h,t)\} \\ &+a^2\frac{k^2}{2h^2}\{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)\}+O(k^3)+O(h^2k) \end{aligned}$$

とすることができるが、この式の誤差項を取り除いたもの

$$\begin{aligned} u(x,t+k) = u(x,t) &- a\frac{k}{2h}\{u(x+h,t)-u(x-h,t)\} \\ &+a^2\frac{k^2}{2h^2}\{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)\} \end{aligned} \tag{2.28}$$

を Lax-Wendroff 法と呼ぶ。ここで安定条件を考える。式 (2.28) を x に関してフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi,t+k) &= \widehat{u}(\xi,t)-\frac{\mu}{2}\{e^{i\theta}\widehat{u}(\xi,t)-e^{-i\theta}\widehat{u}(\xi,t)\}\\ &\quad+\frac{\mu^2}{2}\{e^{i\theta}\widehat{u}(\xi,t)-2\widehat{u}(\xi,t)+e^{-i\theta}\widehat{u}(\xi,t)\}\qquad\left(\mu=a\frac{k}{h},\theta=\xi h\right)\\ &= \left\{1-\frac{\mu}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})+\frac{\mu^2}{2}(e^{i\theta}-2+e^{-i\theta})\right\}\widehat{u}(\xi,t)\\ &= A\widehat{u}(\xi,t)\end{aligned}$$

となる。A は、

$$\begin{aligned}A &= 1-\frac{\mu}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})+\frac{\mu^2}{2}(e^{i\theta}-2+e^{-i\theta})\\ &= 1-i\mu\sin\theta+\frac{\mu^2}{2}(2\cos\theta-2)\\ &= (1-\mu^2+\mu^2\cos\theta)-i\mu\sin\theta\end{aligned}$$

となるので、$|A|^2$ は、

$$\begin{aligned}|A|^2 &= (1-\mu^2+\mu^2\cos\theta)^2+\mu^2\sin^2\theta\\ &= (1-\mu^2)^2+2(1-\mu^2)\mu^2\cos\theta+\mu^4\cos^2\theta+\mu^2(1-\cos^2\theta)\\ &= 1-\mu^2+\mu^4+2\mu^2(1-\mu^2)\cos\theta+(\mu^4-\mu^2)\cos^2\theta\end{aligned}$$

よって、$|A|^2-1$ は、

$$\begin{aligned}|A|^2-1 &= -\mu^2+\mu^4+2\mu^2(1-\mu^2)\cos\theta+(\mu^4-\mu^2)\cos^2\theta\\ &= \mu^2(\mu^2-1)(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\\ &= \mu^2(\mu^2-1)(1-\cos\theta)^2\end{aligned}$$

となる。よって安定条件は、$0\le 1-\cos\theta\le 1$ より、

$$|A|^2-1\le 0\Longrightarrow\mu^2(\mu^2-1)\le 0\Longrightarrow\mu^2-1\le 0\Longrightarrow|\mu|\le 1$$

$\mu=ak/h$ だったので、

$$|a|\frac{k}{h}\le 1 \tag{2.29}$$

となり、Lax-Friedrics 法の安定条件 式 (2.23) と同じになる。

線形の方程式 $u_t+au_x=0$ で Lax-Wendroff の差分方程式を表すと、式 (2.28) となったが、非線形の方程式

$$u_t+f(u)_x=0$$

の場合は、$f(u)_x=f'(u)u_x$ (u が x 方向に滑らかな場合) を用いると

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.30}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{\partial f'(u)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} - f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \\
&= -\frac{\partial f'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} - f'(u)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} \\
&= -f''(u)\left(-f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - f'(u)\frac{\partial}{\partial x}\left(-f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= f''(u)f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + f'(u)\frac{\partial f'(u)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + (f'(u))^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= f''(u)f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + f'(u)\frac{\partial f'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + (f'(u))^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= f''(u)f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + f'(u)f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (f'(u))^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= 2f''(u)f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (f'(u))^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

となるので、$u(x,t+k)$ のテイラー展開

$$u(x,t+k) = u(x,t) + k\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + O(k^3)$$

に式 (2.30),(2.31) を代入すると、

$$
\begin{aligned}
u(x,t+k) &= u(x,t) - kf'(u)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \\
&+ k^2 f''(u)f'(u)\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)^2 \\
&+ \frac{k^2}{2}(f'(u))^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + O(k^3) \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

となる。ここで式 (2.32) の右辺を空間中心差分で近似すると、

$$
\begin{aligned}
u(x,t+k) = u(x,t) &- f'(u)\frac{k}{2h}\{u(x+h,t) - u(x-h,t)\} \\
&+ f''(u)f'(u)\frac{k^2}{4h^2}\{u(x+h,t) - u(x-h,t)\}^2 \\
&+ (f'(u))^2\frac{k^2}{2h^2}\{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\} \\
&+ O(k^3) + O(h^2 k) \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

となる。また、式 (2.33) は、

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} = u_j^n - f'(u_j^n)\frac{k}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) &+ f''(u_j^n)f'(u_j^n)\frac{k^2}{4h^2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)^2 \\
&+ (f'(u_j^n))^2\frac{k^2}{2h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

と書くこともできる。

式 (2.34) を用いて数値計算を行おうとすると、面倒な式を考えなければならない。そこで、ここではより簡単な方法として、既に作られている 2 段階 Lax-Wendroff 法 [7] を使用する。2 段階 Lax-Wendroff 法は、第 1 段階で一次精度の中間的予測子を求め、第 2 段階で二次精度の u_j^{n+1} の値を求める予測子修正子法の一つである。2 段階 Lax-Wendroff 法はいくつかの形が考えられるが、ここでは、Richtmyer の方法と MacCormack の方法について紹介する。

2.5.1 Richtmyer 法

まず、線形の方程式 $u_t + au_x = 0$ で考えると差分方程式は、

$$\begin{cases} \text{第 1 段階} \quad u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \dfrac{k}{2h}(au_{j+1}^n - au_j^n) \\ \text{第 2 段階} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \dfrac{k}{h}\left(au_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - au_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases} \tag{2.35}$$

となる。式 (2.35) の第 1 段階から求められる $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ と $u_{j-1/2}^{n+1/2}$ を第 2 段階に代入して計算すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{k}{2h}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - a^2\frac{k^2}{2h^2}(u_{j+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

となり、Lax-Wendroff 法の式 (2.28) と同じ方程式を得ることができる。よって、安定性は Lax-Wendroff 法と同じ

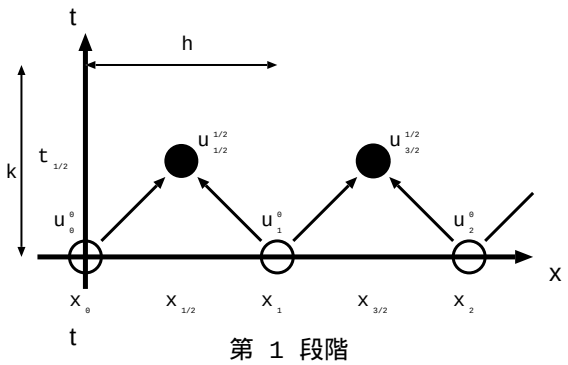
$$|a|\frac{k}{h} \leq 1 \tag{2.36}$$

である。

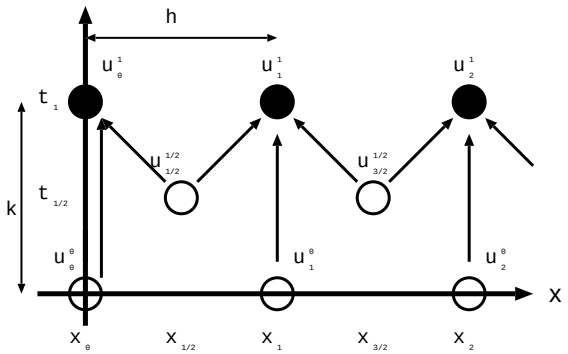
非線形の方程式 $u_t + f(u)_x = 0$ の場合は、au を $f(u)$ で置き換えて、

$$\begin{cases} \text{第 1 段階} \quad u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \dfrac{k}{2h}\{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)\} \\ \text{第 2 段階} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \dfrac{k}{h}\left\{f\left(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - f\left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)\right\} \end{cases} \tag{2.37}$$

とすることができる。この方法を図示すると、Fig.2.3 のようになる。



第 1 段階



第 2 段階

Fig. 2.3 Richtmyer 法

2.5.2 MacCormack 法

まず、線形の方程式 $u_t + au_x = 0$ で考えると差分方程式は、

$$\begin{cases} \text{第 1 段階} \quad \tilde{u}_j = u_j^n - \dfrac{k}{h}(au_{j+1}^n - au_j^n) \\ \text{第 2 段階} \quad u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \dfrac{k}{2h}(a\tilde{u}_j - a\tilde{u}_{j-1}) \end{cases} \tag{2.38}$$

または、

$$\begin{cases} \text{第 1 段階} \quad \tilde{u}_j = u_j^n - \dfrac{k}{h}(au_j^n - au_{j-1}^n) \\ \text{第 2 段階} \quad u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \dfrac{k}{2h}(a\tilde{u}_{j+1} - a\tilde{u}_j) \end{cases} \tag{2.39}$$

となる。式 (2.38) の第 1 段階から求められる $\tilde{u}_j$ と $\tilde{u}_{j-1}$ を第 2 段階に代入して計算すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{k}{2h}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - a^2\frac{k^2}{2h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

となり、Lax-Wendroff 法の式 (2.28) と同じ方程式を得ることができる。なので、安定性は式 (2.36) となる。式 (2.39) も同様にして、式 (2.28) と式 (2.36) を導くことができる。

式 (2.38) の第 1 段階は x に関して前進差分を、第 2 段階も x に関して後退差分をそれぞれ用いている。また、式 (2.39) はその逆になっている。そこで便宜上、式 (2.38) を MacCormack 法の前進差分、式 (2.39) を MacCormack 法の後退差分と呼ぶことにする。

非線形の方程式 $u_t + f(u)_x = 0$ の場合は、au を $f(u)$ で置き換えると、式 (2.38)(前進差分) は、

$$\begin{cases} \text{第 1 段階} \quad \tilde{u}_j = u_j^n - \dfrac{k}{h}\{f(u_{j+1}^n) - f'(u_j^n)\} \\ \text{第 2 段階} \quad u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \dfrac{k}{2h}\{f(\tilde{u}_j) - f(\tilde{u}_{j-1})\} \end{cases} \tag{2.40}$$

式 (2.39)(後退差分) は、

$$\begin{cases} \text{第 1 段階} \quad \tilde{u}_j = u_j^n - \dfrac{k}{h}\{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)\} \\ \text{第 2 段階} \quad u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \dfrac{k}{2h}\{f(\tilde{u}_{j+1}) - f'(\tilde{u}_j)\} \end{cases} \tag{2.41}$$

と考えることができる。この方法を図示すると、Fig.2.4,2.5 のようになる。

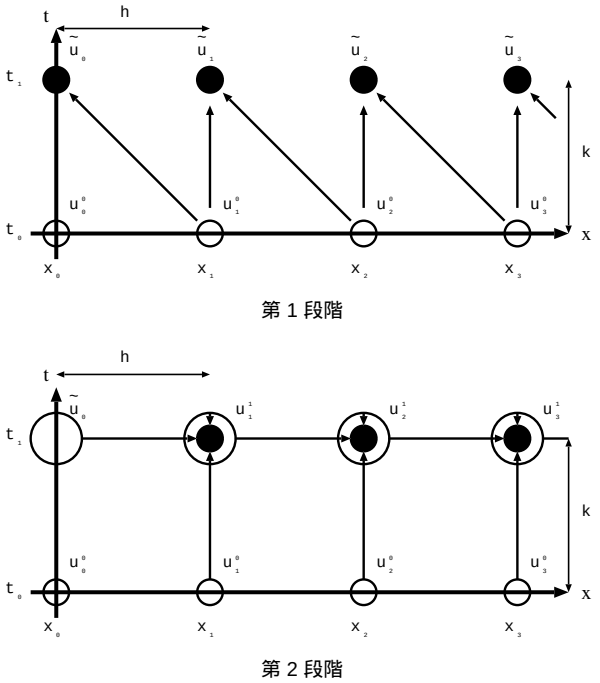


Fig. 2.4 MacCormack 法 (前進差分)

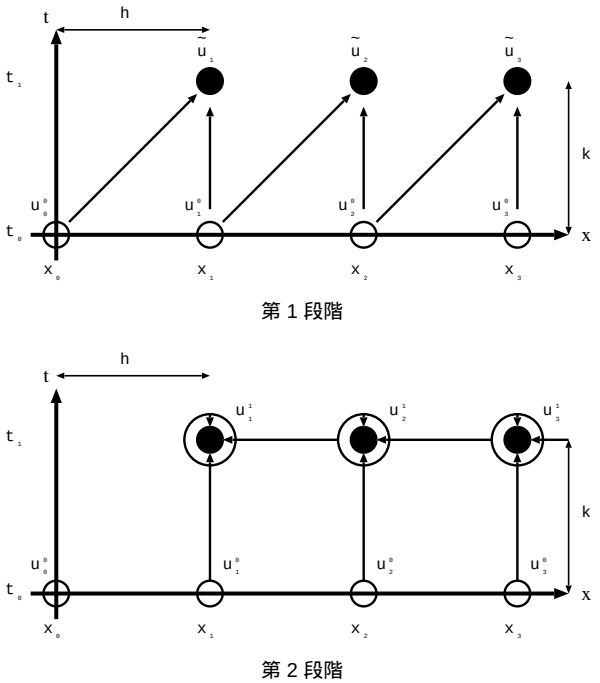


Fig. 2.5 MacCormack 法 (後退差分)

3　衝撃波

一般に、非線形保存則方程式においては、初期値が微分可能性の高い滑らかな関数でも、有限時刻で解の滑らかさが失われて、不連続性が発生する現象が起こる。このような不連続な解は、一般に 衝撃波 と呼ばれている。図で表せば、Fig.3.1 のような a 点から b 点への急激な u の変化の部分である。

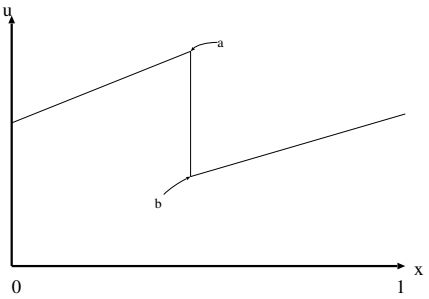


Fig. 3.1　衝撃波

また、本稿で扱っている Burgers 方程式には、ショックダウン (Fig.3.1 の a 点から b 点のような値の減少) しかないことが知られている [13]。

4　実験と考察

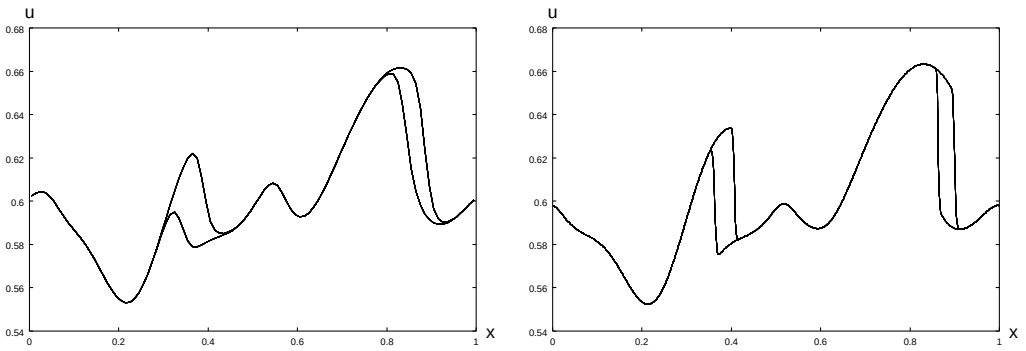
4.1　衝撃波の傾きでの比較

Burgers 方程式に時間周期外力を、竹野助教授 [11] と昨年の木原氏 [1] の研究で用いられている、周期が T である次のような関数にする。

$$g(x,t) = A\sin\Big(\frac{2\pi t}{T}\Big)h(x;a,N) = \begin{cases} \sin^2\Big(\dfrac{N\pi x}{a}\Big) & (0 < x \leq a) \\ 0 & (a < x \leq 1) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$(0 < a < 1, A > 0, N = 1, 2, \cdots)$$

木原氏の研究では、長時間計算において、上の外力を付けた時と付けない時の一次精度と二次精度の差分を、グラフを見ることで比較していた。外力を付けないときは、二次精度の MacCormack 法 (前進差分) においては他のグラフと形が全く異なるものが得られたが、外力を付けたときは、二次精度の差分の方が一次精度の差分よりも精度が良いという結果が得られた。本研究では、外力を付けた場合で考えて、視覚的にはそのような結果が得られたものが、数値的に見るとどのような結果が得られるのかを考えることとし、まず木原氏の研究と同じ方法でグラフを見てみた (Fig.4.1)。Fig.4.1 は、$T = 0.8$ とし、300 ~ 330 周期までのグラフを重ねて書いたものである。なおこれらのグラフは、分割数を増や



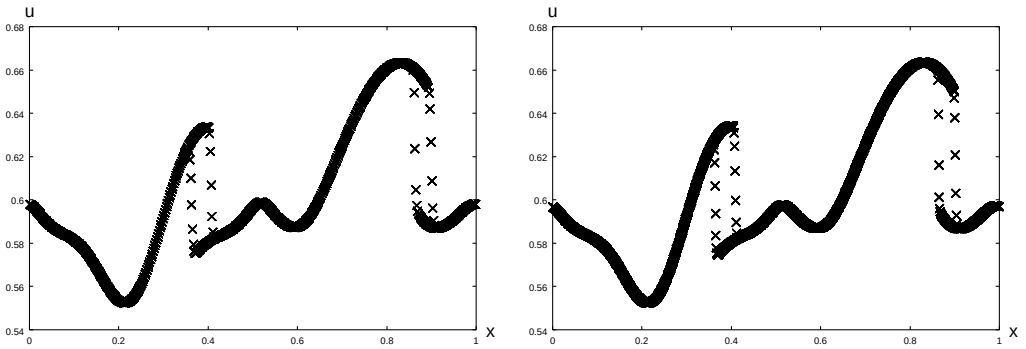
(a) 100 分割　(b) 500 分割

(c) 1000 分割　(d) 3000 分割

Fig. 4.1 Lax-Friedrics 法

していったものの方が真の解に近いものとなる。この Fig.4.1 を見ると、2 本のグラフが重なっているように見える (実際は 31 本)。このような解を 2T-周期解と呼んでいる [11]。

また、計算で得られた各データを Fig.4.1(b),(d) について、点で表示したものが Fig.4.2 である。



(a) 500 分割　　(b) 1000 分割

Fig. 4.2 データの点による表示

ここで、Fig.4.1,4.2 から衝撃波の特徴を考えてみる。

特徴 **1.** 500 分割と 1000 分割では、衝撃波を構成する点の数が同じ (Fig.4.2)

特徴 **2.** 500 分割以上になると衝撃波の高さが一定になってくる (Fig.4.1)

特徴 **3.** 衝撃波を構成する隣り合う点の距離が衝撃波でない隣り合う点の距離より離れているため、衝撃波以外の所は線で結んだように見える (Fig.4.2)

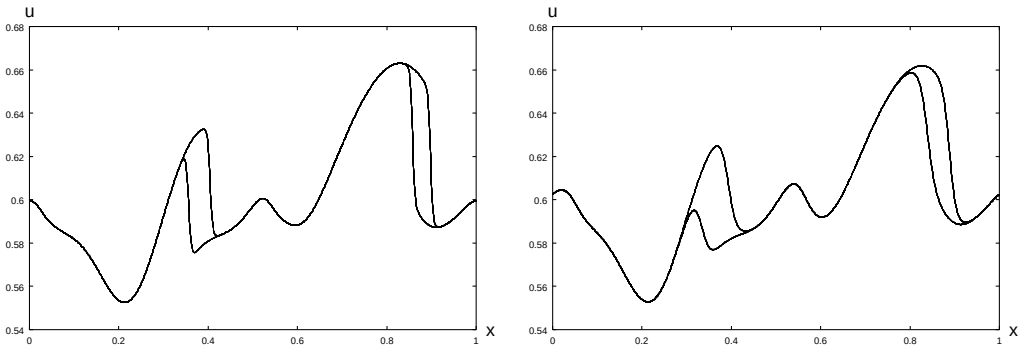
特徴 1 より、衝撃波を構成する点の数が同じことから、分割数が増加すると点同士の x の幅がそれに比例して狭まると考えられる。さらに、特徴 2 より衝撃波の高さが一定であることから、分割数が大きくなるにつれて衝撃波の傾きもそれに比例して大きくなることも予想される。これらのことから、衝撃波の傾きと分割数の関係が調べられそうである。そしてその関係から、一次精度と二次精度の差分法を数値的に比較することができるのではないかと考えられる。

また、Fig.4.3 のように CFL 条件の値を変化させてみても、グラフに変化が生じたので、これについても関係を調べることにした。

まず、衝撃波の傾きを求める方法として、特徴 3. から以下の方法を用いた。

1. 縦軸のスケールが変化してもいいように、数値計算結果のデータの最大値 (u_{max}) と最小値 (u_{min}) から各データを正規化する

$$\bar{u}_j = \frac{u_j^n - u_{min}}{u_{max} - u_{min}}$$



(a) CFL 条件の値 = 0.8　　(b) CFL 条件の値= 1.2

Fig. 4.3 Lax-Friedrics 法, 1000 分割

2. 正規化後の各データから 2 点 $(x_j, \bar{u}_j), (x_{j+1}, \bar{u}_{j+1})$ の距離

$$dist(\bar{u}_j, \bar{u}_{j+1}) = \sqrt{(\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j)^2 + (x_{j+1} - x_j)^2}$$

の最大値 (d_{max}) を求める

3. 各点の距離を距離の最大値で割ったものが、閾値 (δ) を越えた時

$$\frac{dist(\bar{u}_j, \bar{u}_{j+1})}{d_{max}} > \delta$$

を衝撃波の開始点とし、閾値以下

$$\frac{dist(\bar{u}_j, \bar{u}_{j+1})}{d_{max}} < \delta$$

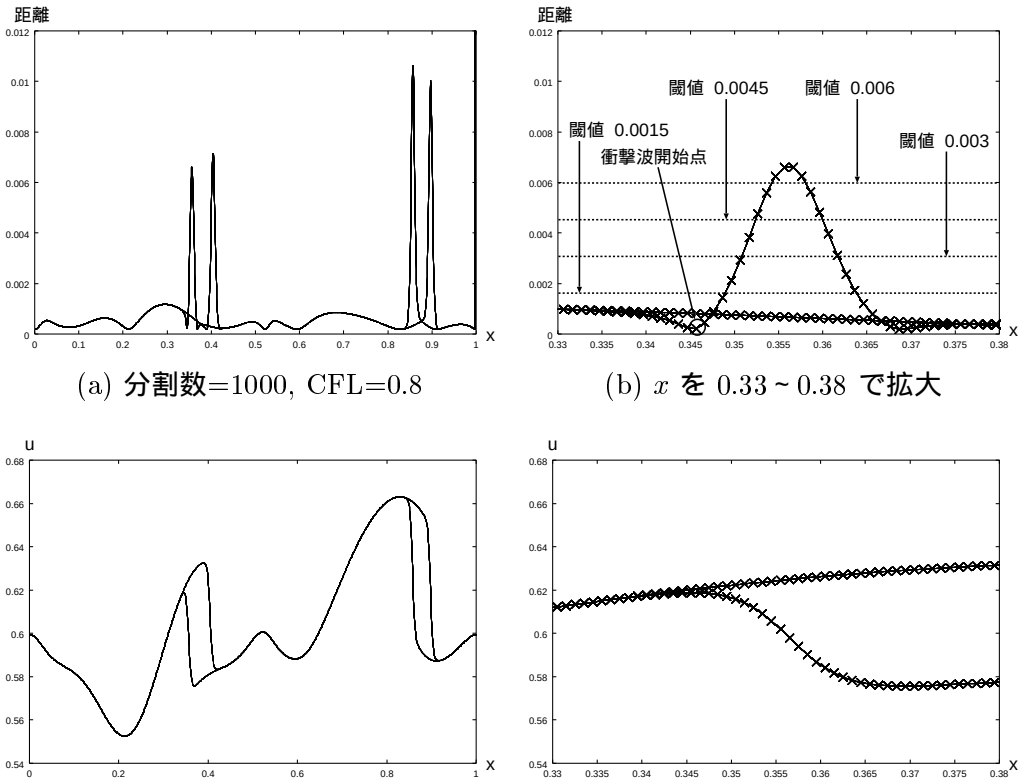
になるまでを衝撃波とみなす

4. 衝撃波をほぼ直線と見て、それらを構成する点から、回帰直線を用いて傾きを求める

そこで、この方法が使えるかどうか閾値をずらして、傾きを求めてみた。

閾値		傾き
0.0015	$\Longrightarrow$	-23.301036
0.0030	$\Longrightarrow$	-27.446192
0.0045	$\Longrightarrow$	-29.576468
0.0060	$\Longrightarrow$	-33.440082

しかし、このように閾値によって傾きの値が大きく変わってしまった。そこで、Fig.4.4 のようなグラフを見てみたところ、(a),(b) の距離のグラフにおいて滑らかにつながってい



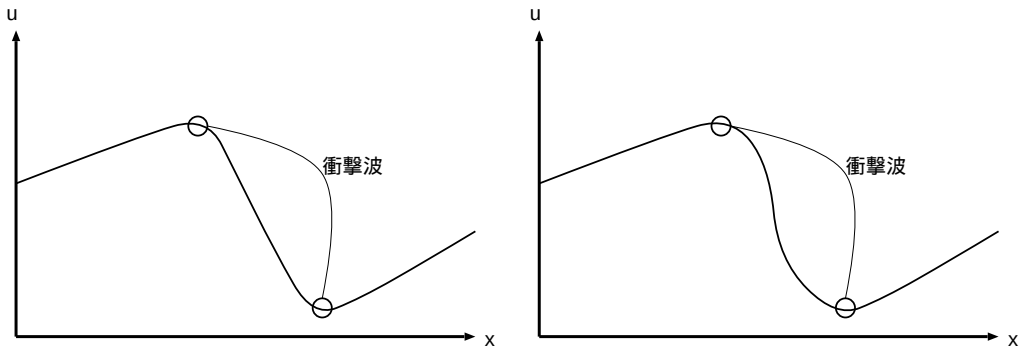
(a) 分割数=1000, CFL=0.8

(b) x を 0.33 ~ 0.38 で拡大

(c) (a) に対応する u のグラフ

(c) (b) に対応する u のグラフ

Fig. 4.4 Lax-Friedrics 法



(a) 予想

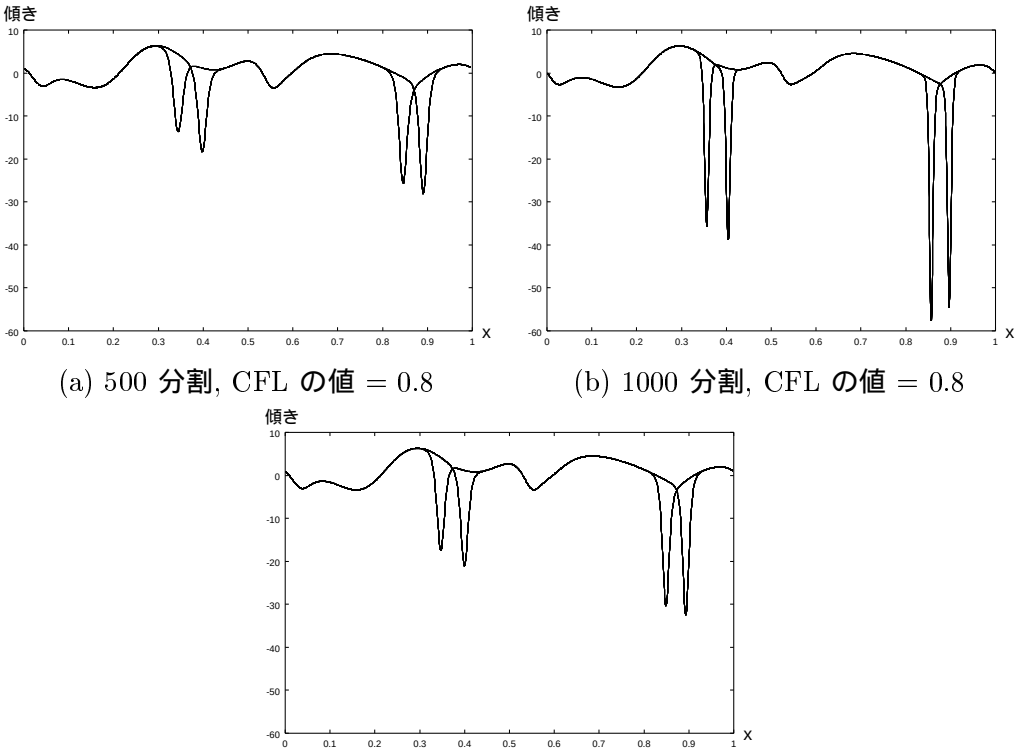
(b) 実際

Fig. 4.5 予想と実際の衝撃波

るため、衝撃波自体直線ではなく、曲線になっているということが分かった。これを見る前は、衝撃波が Fig.4.5(a) のようになっていて、衝撃波でなくなるまではずっと直線であると予想していた。しかし、実際は Fig.4.5(b) のように衝撃波自体が曲線であるために、先程のように閾値によって傾きが大きく変わってしまうため、この方法ではきちんと比較することはできないと考えられる。他の方法で衝撃波を切り出して傾きを求められるのかもしれないが、本研究では時間が無いため、別の比較方法を考えることにした。

4.2 傾きの最小値での比較

衝撃波を構成する点の数は、特徴 1. より、分割数が変化しても一定であると考えられる。そのことから、衝撃波の傾きでの比較に近い方法だが、衝撃波全体で考えず、Fig.4.6 のような、分割数や CFL 条件の値によって変化する 2 点間での最大の負の傾きで比較するという方法が考えられる。これは、CFL 条件の値が大きい、もしくは分割数が小さ

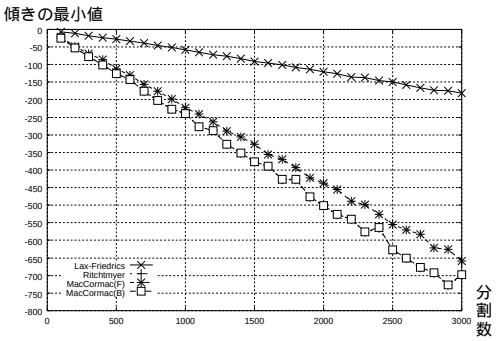


(a) 500 分割, CFL の値 = 0.8　(b) 1000 分割, CFL の値 = 0.8

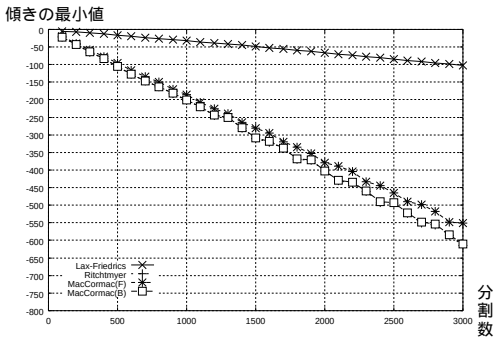
(c) 1000 分割, CFL の値 = 0.96

Fig. 4.6 Lax-Friedrics 法

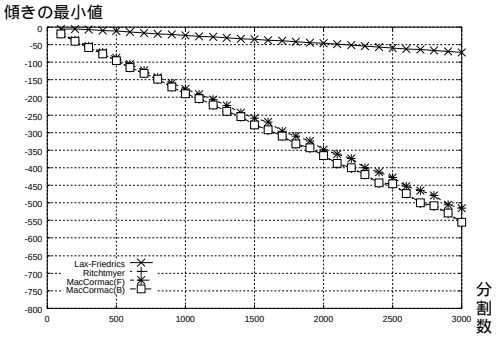
い状態で衝撃波は直線にはならないであろうから、本当の比較にはならないかもしれないが、差分を比較する 1 つの指標として使えるかどうか調べてみる。横軸を分割数とした比較結果を Fig.4.7 に示す。



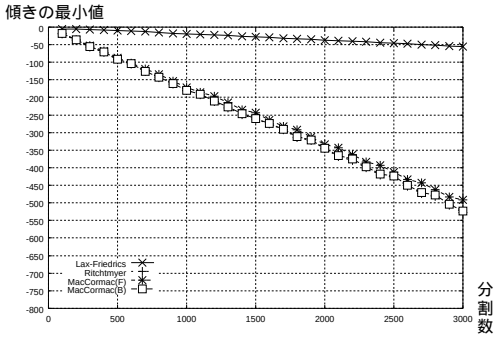
(a) CFL の値 = 0.8



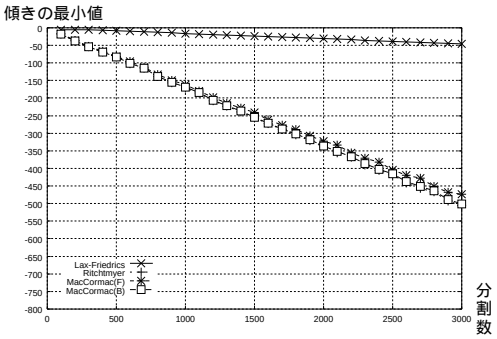
(b) CFL の値 = 0.96



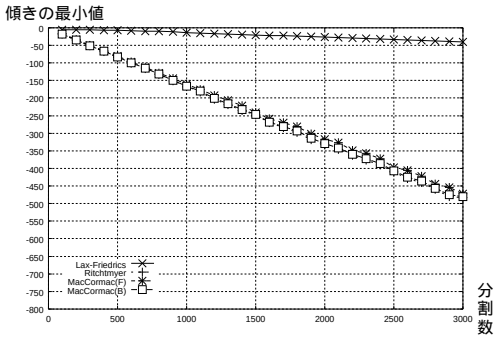
(c) CFL の値 = 1.12



(d) CFL の値 = 1.28



(e) CFL の値 = 1.44



(f) CFL の値 = 1.6

Fig. 4.7 分割数を変化させていった図

一次精度の差分では、衝撃波の傾きの最小値は分割数に対して直線的に減少し、二次精度の差分は分割数に対して二次関数的に最小値が減少していくのではないかと予想されたが、Fig.4.7 を見ると二次精度の差分のいずれに対してもほぼ直線で表されていることが分かった。よって、傾きの最小値には規則性があることが分かり、これを近似の度合いの指標に利用できる可能性が出て来た。この回帰直線を調べたものが Table 4.1 である。

Table 4.1 Fig.4.7 のグラフの回帰直線 ($\partial u/\partial x = (1) * (\text{分割数}) + (2)$)

CFL の値		Lax-Friedrics 法	Richtmyer 法	MacCormack 法 (前進差分)	MacCormack 法 (後退差分)
0.8	(1)	-0.061465	-0.218076	-0.219681	-0.216932
	(2)	2.401920	-45.440888	0.169334	-46.428567
0.96	(1)	-0.035029	-0.207386	-0.179863	-0.206197
	(2)	2.591150	8.259820	-10.716842	7.657779
1.12	(1)	-0.024262	-0.187987	-0.170491	-0.186647
	(2)	0.947873	5.039674	-3.663895	4.636674
1.28	(1)	-0.018524	-0.176868	-0.161674	-0.175184
	(2)	-0.234016	3.373365	-6.271094	2.665011
1.44	(1)	-0.014845	-0.167620	-0.153277	-0.165353
	(2)	-1.283189	-2.980501	-12.839158	-4.494725
1.6	(1)	-0.012830	-0.156245	-0.156617	-0.156521
	(2)	-1.251098	-14.123342	-2.328850	-11.335543

Table 4.1 から、CFL 条件の値が 0.8 で傾きが 約 (-110) となる Richtmyer 法 (300 分割) が本当に傾きが 約 (-110) となる Lax-Friedrics 法 (1800 分割) に一番近いかどうかを一昨年の大川戸氏 [2] の研究にある L^2 ノルムで $u_N^{LF}(x, mT)(= N$ 分割の Lax-Friedrics 法での近似解) と $u_M^R(x, mT)(= M$ 分割の Richtmyer 法での近似解) を比較して調べることとするが、$m = 300 \sim 330$ で考えているので、L^2 ノルムの値の平均値

$$\frac{1}{31}\sum_{m=300}^{330}\left\{\int_0^1 |u_N^{LF}(x, mT) - u_M^R(x, mT)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

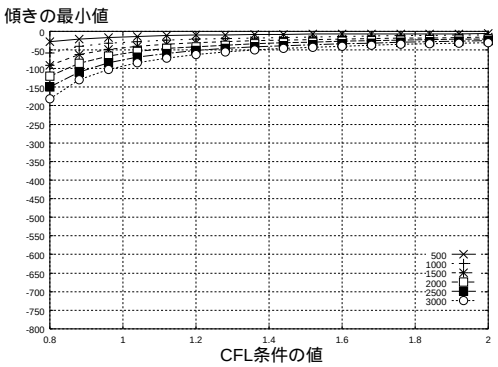
及び、L^2 ノルムの値を 2 乗したものの平均値の平方根

$$\sqrt{\frac{1}{31}\sum_{m=300}^{330}\left\{\int_0^1 |u_N^{LF}(x, mT) - u_M^R(x, mT)|^2 dx\right\}}$$

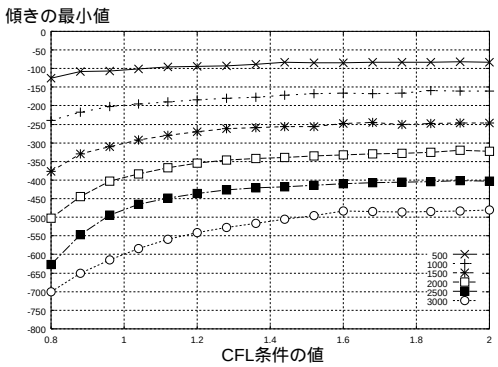
を用いることにした。これは、この数値が小さい程その関数同士が近いということを意味する。Richtmyer 法 (300 分割) と Lax-Friedrics 法の比較結果は、Table 4.2 のようになった。この表を見ると、1000 分割や 1400 分割の方が Richtmyer 法 (300 分割) に近いように見える。この結果から、この時点では傾きの最小値での比較は、原理的に無理である可能性が出て来た。

Table 4.2 Richtmyer 法 (300 分割) との L^2 ノルムでの比較

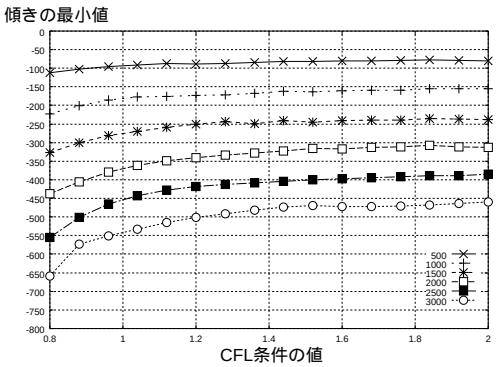
分割数	L^2 ノルムの値 の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ノルムの値})^2}$の平均値
600	9.129093×10^{-3}	9.134174×10^{-3}
1000	8.868299×10^{-3}	8.871667×10^{-3}
1400	8.890582×10^{-3}	8.892116×10^{-3}
1800	8.933488×10^{-3}	8.934147×10^{-3}
2200	8.990194×10^{-3}	8.990466×10^{-3}
2600	9.038695×10^{-3}	9.038801×10^{-3}
3000	9.085098×10^{-3}	9.085130×10^{-3}



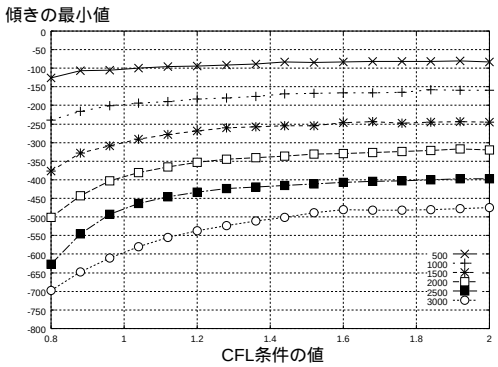
(a) Lax-Friedrics 法



(b) Richtmyer 法



(c) MacCormack 法 (前進差分)



(d) MacCormack 法 (後退差分)

Fig. 4.8 CFL 条件の値を変化させていった図

また、横軸を CFL 条件の値とした比較結果を Fig.4.8 に示す。CFL 条件の値にも規則性を見つけたいため、グラフが直線となるような縦軸と横軸を探した結果、縦軸を傾きの最小値の対数、横軸を CFL 条件の値の逆数とした Fig.4.9 のような関係が見つかった。

Fig.4.9 から、関係式

$$\log\left\{-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{min}\right\} = A\frac{1}{cfl} + B_N \qquad \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{min} \text{は} \frac{\partial u}{\partial x} \text{の最小値}\right)$$

(A: Fig.4.9 から求められる回帰直線の傾き, B_N: 切片, N: 分割数, cfl: CFL 条件の値)

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{min} = e^{A\frac{1}{cfl}+B_N} = e^{B_N}e^{A\frac{1}{cfl}} = (aN+b)e^{A\frac{1}{cfl}} \tag{4.2}$$

が求められる。式 (4.2) 中の A, a, b を求めるとそれぞれ Table 4.3 のようになる。ここ

Table 4.3 式 (4.2) 中の A, a, b

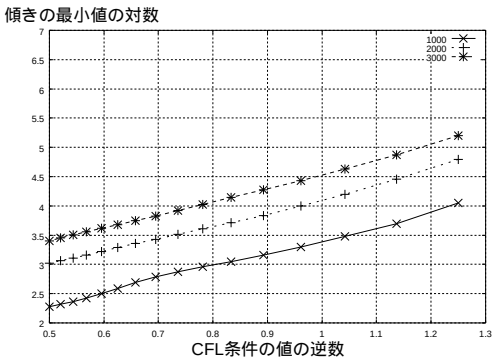
差分法	A	a	b
Lax-Friedrics 法	2.11943	0.004780	2.664438
Richtmyer 法	0.364827	0.140591	5.105639
MacCormack 法 (前進差分)	0.293644	0.136782	7.603710
MacCormack 法 (後退差分)	0.376004	0.137857	6.302551

で、MacCormack 法 (前進差分)(1000 分割, CFL の値 1.6, $-\partial u/\partial x = -164$) と、Lax-Friedrics 法 (CFL の値 0.8, $-\partial u/\partial x = -162$) の 2400 分割付近の比較を行なった結果が Table 4.4 である。CFL 条件の値を考慮しても、L^2 ノルムの値で一次精度と二次精度の

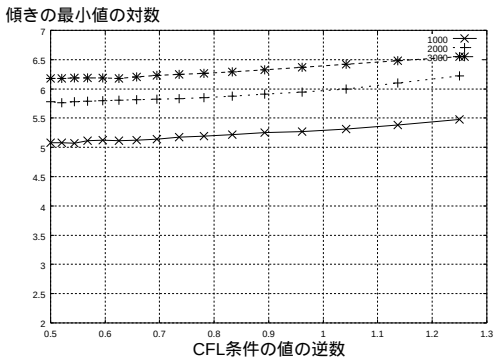
Table 4.4 L^2 ノルムでの比較

分割数	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ノルムの値})^2}$の平均値
1200	1.154669×10^{-2}	1.154672×10^{-2}
1600	1.181199×10^{-2}	1.181203×10^{-2}
2000	1.198686×10^{-2}	1.198697×10^{-2}
2400	1.209337×10^{-2}	1.209356×10^{-2}
2800	1.216418×10^{-2}	1.216444×10^{-2}

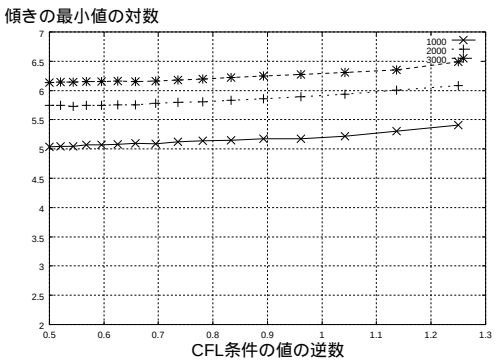
差分の比較に、関係式から導かれた 2400 分割ではなく、1200,1600,2000 分割の方が近いという結果になってしまった。これを見ると、衝撃波の傾きの最小値で比較するという方法は、原理的に無理があるようで、一次精度と二次精度の差分の比較には使えないのではないかと考えられる。



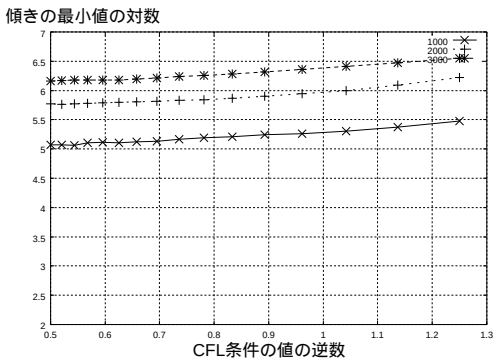
(a) Lax-Friedrics 法



(b) Richtmyer 法



(c) MacCormack 法 (前進差分)



(d) MacCormack 法 (後退差分)

Fig. 4.9 Fig.4.8 が直線になるようにした図

4.3 衝撃波の幅での比較

4.2 節では、結局現段階で一次精度と二次精度の差分の比較を行うための指標が見つからなかった。そこで、他に差分の比較を行うための指標として何か無いかと考えたのが、衝撃波の幅での比較である。

4.1 節の特徴 1 から、分割数に比例して衝撃波の幅も狭まると考えられる。傾き $\partial u/\partial x$ のグラフ (Fig.4.6) を見ても分かるように、衝撃波以外の部分の傾きは、分割数と CFL 条件の値の変化に対してあまり変化していない。これらのことから、分割数や CFL 条件の値によって変化している衝撃波の幅を利用して、一次精度と二次精度の差分の比較ができるのではないかと考えられる。

衝撃波の幅の取り出し方は、以下のようにする。

1. 縦軸のスケールが変化してもいいように、数値計算結果のデータの最大値 (u_{max}) と最小値 (u_{min}) から各データを正規化する

$$\bar{u}_j = \frac{u_j^n - u_{min}}{u_{max} - u_{min}}$$

2. 傾きが最小値の x 座標 (x 分割目) を求める

3. 傾き $(\partial \bar{u}_j/\partial x)$ が閾値 (δ) を越えない

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x}\left(= \frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j}{x_{j+1} - x_j}\right) < \delta$$

そして今の傾きの方が 1 つ先の傾きより大きい間

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} > \frac{\partial \bar{u}_{j+1}}{\partial x}$$

幅の開始点 (x_s) を 1 つずつ減らして行く

4. 傾き $(\partial \bar{u}_j/\partial x)$ が閾値 (δ) を越えない

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} < \delta$$

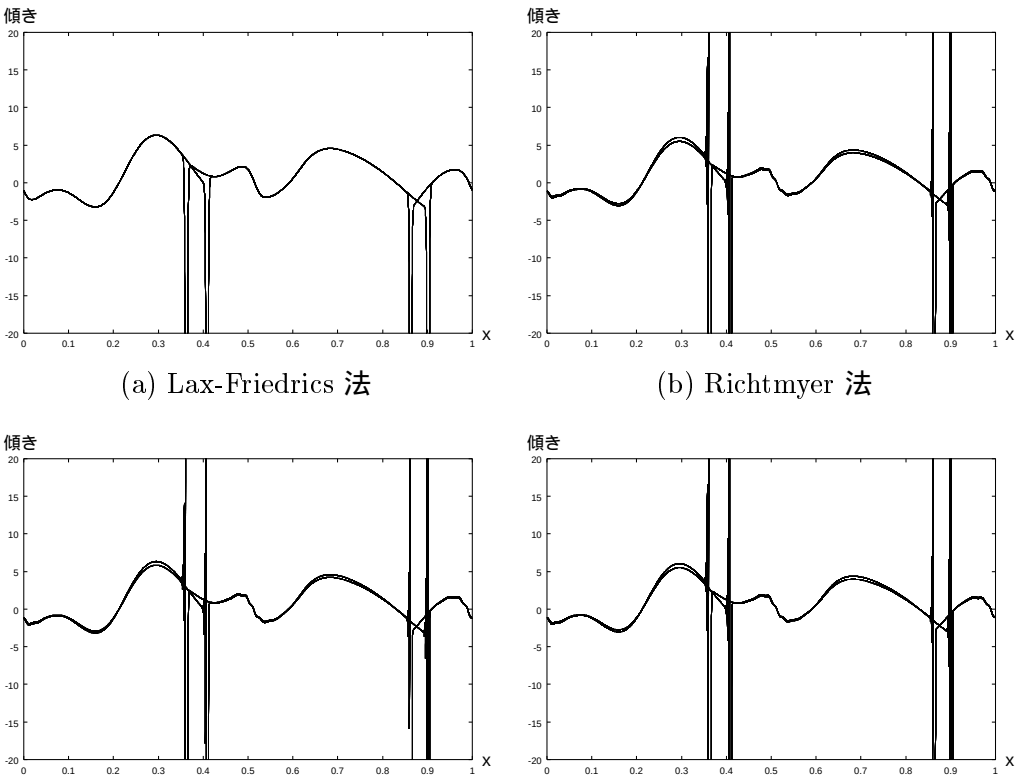
そして今の傾きの方が 1 つ前の傾きより大きい間

$$\frac{\partial \bar{u}_{j-1}}{\partial x} < \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x}$$

幅の終了点 (x_e) を 1 つずつ増やして行く

5. 幅の開始点と終了点から幅の値 $(sband)$ を求める

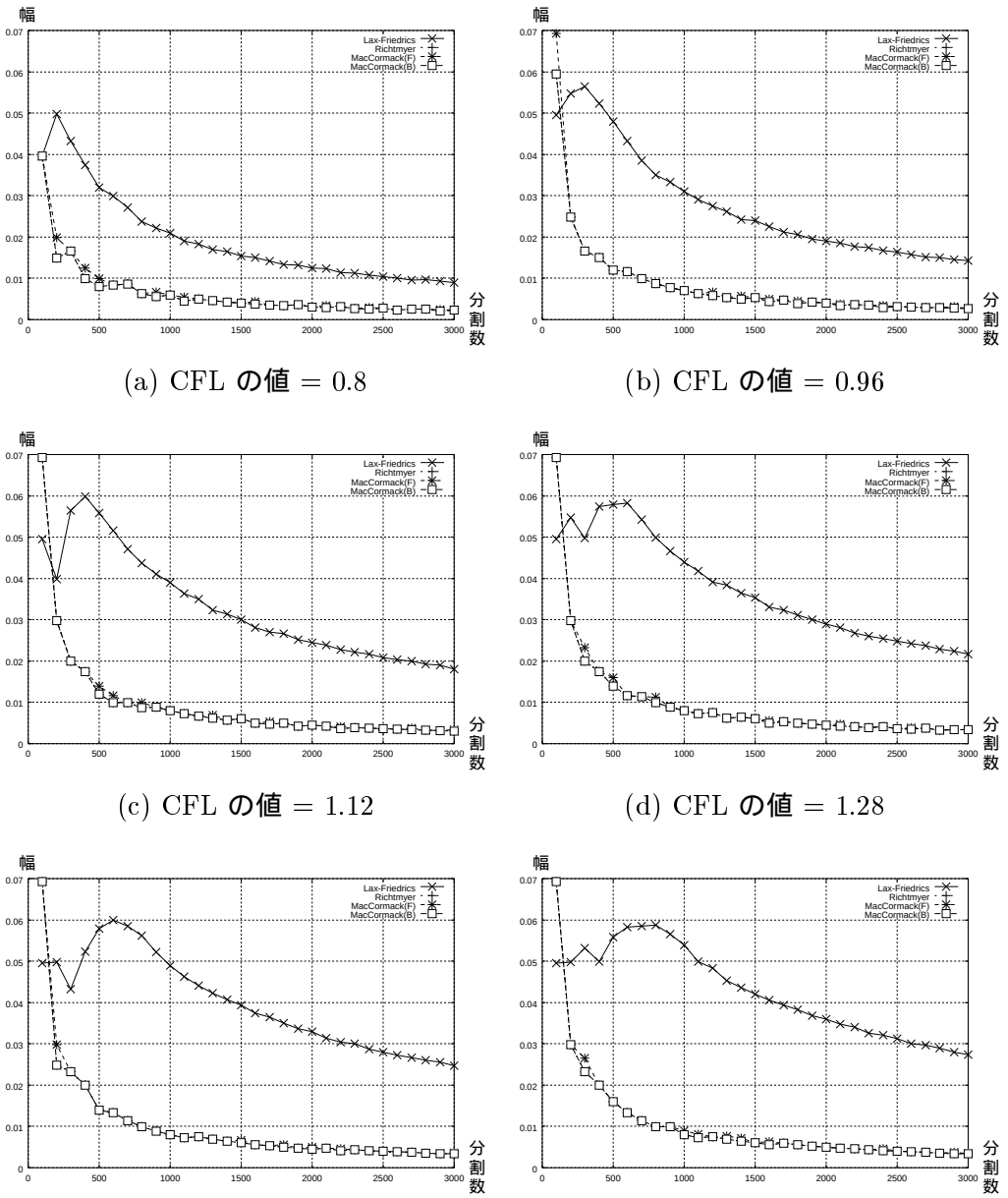
$$sband = \frac{x_e - x_s}{N} \qquad (N \text{ は分割数})$$



(a) Lax-Friedrics 法　(b) Richtmyer 法

(c) MacCormack 法 (前進差分)　(d) MacCormack 法 (後退差分)

Fig. 4.10 傾きを $-20 \sim 20$ で拡大, 3000 分割, CFL 条件の値 $= 0.8$



(a) CFL の値 = 0.8　(b) CFL の値 = 0.96

(c) CFL の値 = 1.12　(d) CFL の値 = 1.28

(e) CFL の値 = 1.44　(f) CFL の値 = 1.6

Fig. 4.11 閾値を −5 で分割数を変化させていった図

まず、Fig.4.10 より、衝撃波 (突出している 4 本) 以外は $\partial u/\partial x$ が -5 よりも小さくなっていないことから、閾値を -5 と設定し、分割数を変化させていった比較結果が Fig.4.11 である。 Fig.4.11(a) の 100,(b) の 200,(c) の 300,(d) の 500,(e) の 700,(f) の 900 分割より前の部分は、分割数が少ないので各データの間隔が広すぎるために発生した誤差だと考えられる。また、Fig.4.11 のグラフが直線になるように両軸を対数にとったグラフが Fig.4.12 である。

次に、閾値を倍の -10 としてみた結果が Fig.4.13, Fig.4.14 である。 予想通り、幅が少しずつ狭くなり、分割数の小さい時には閾値を越える傾きが無かったために幅 0 が現われてきている。

ここで、閾値を -5 とした Fig.4.12 から回帰直線を求め、分割数と幅との関係式を考えてみる。関係式は、

$$\log(sband) = A \log N + B$$

$$sband = e^B N^A \tag{4.3}$$

と考えられる。式 (4.3) に CFL 条件の値が 0.96 の時の A, B をそれぞれ求めると、Table 4.5 のようになる。ここで、幅が 0.01975 である MacCormack 法 (後退差分) の 300 分割

Table 4.5 式 (4.3) 中の A, B (CFL 条件の値 0.96)

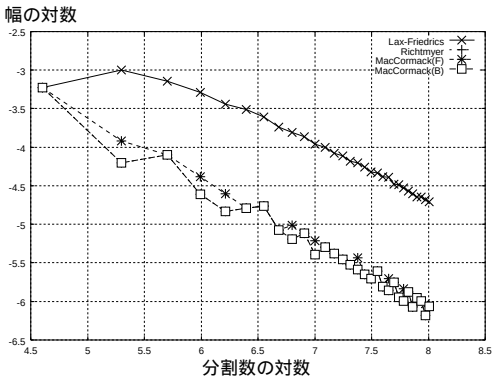
差分法	A	B
Lax-Friedrics 法	-0.678161	1.184106
Richtmyer 法	-0.869644	1.035434
MacCormack 法 (前進差分)	-0.908841	1.349259
MacCormack 法 (後退差分)	-0.869644	1.035434

と幅が 0.01953 である Lax-Friedrics 法の 1900 分割付近を L^2 ノルムの値で比較してみた結果を Table 4.6 に示す。この方法でも、関係式から出て来た Lax-Friedrics 法の 1900

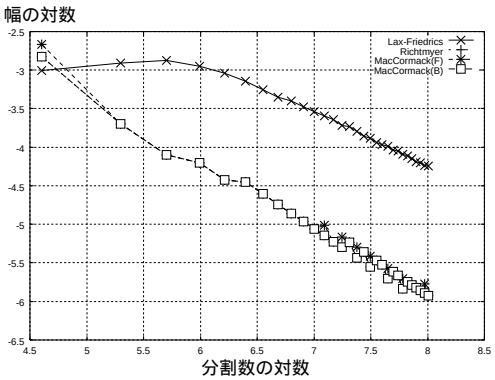
Table 4.6 MacCormack 法 (後退差分) の 300 分割との L^2 ノルムでの比較

分割数	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ノルムの値})^2}$の平均値
1100	1.408606×10^{-2}	1.408902×10^{-2}
1500	1.436562×10^{-2}	1.436778×10^{-2}
1900	1.455682×10^{-2}	1.455859×10^{-2}
2300	1.466765×10^{-2}	1.466915×10^{-2}
2700	1.473331×10^{-2}	1.473462×10^{-2}

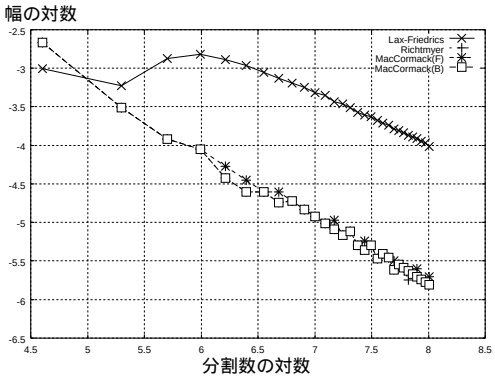
分割ではなく、1100 や 1500 分割の方が MacCormack 法 (後退差分) の 300 分割に近いという結果が出てしまった。この方法も、現時点では一次精度の差分と二次精度の差分を比較する指標に使えないのではないかと考えられる。



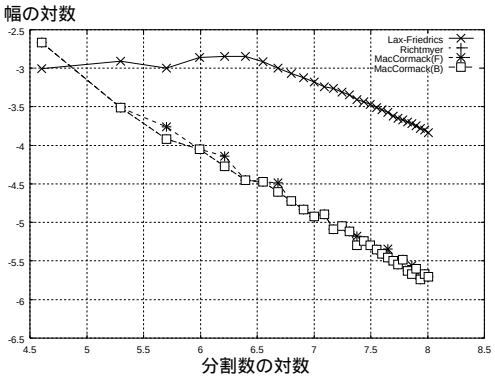
(a) CFL の値 = 0.8



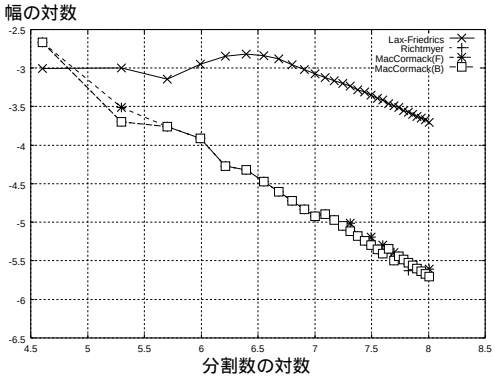
(b) CFL の値 = 0.96



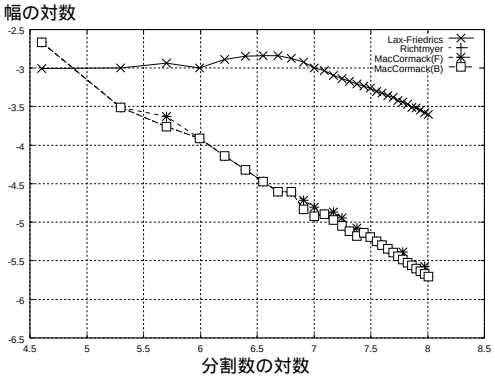
(c) CFL の値 = 1.12



(d) CFL の値 = 1.28

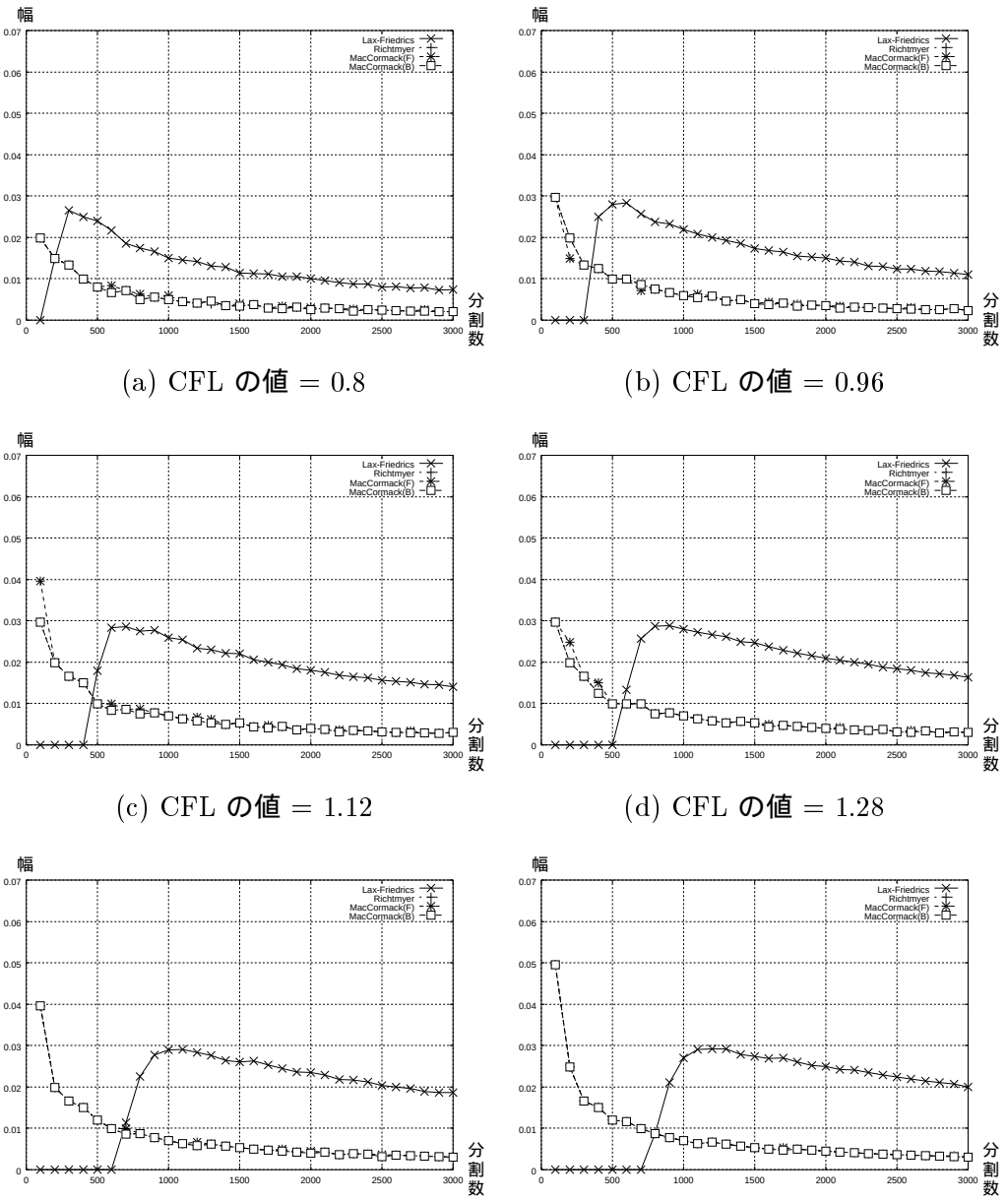


(e) CFL の値 = 1.44



(f) CFL の値 = 1.6

Fig. 4.12 Fig.4.11 の両軸を対数にした図



(a) CFL の値 = 0.8

(b) CFL の値 = 0.96

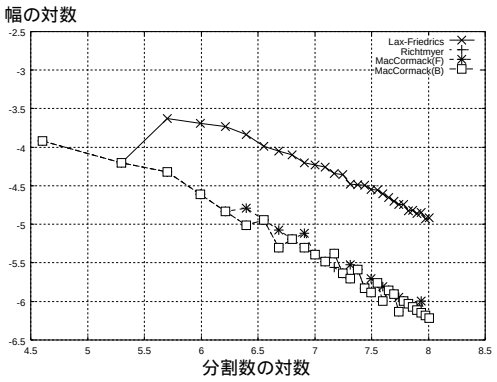
(c) CFL の値 = 1.12

(d) CFL の値 = 1.28

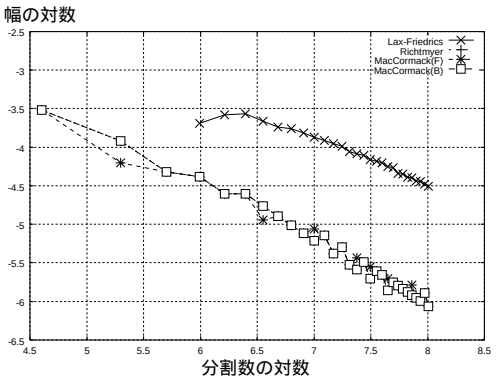
(e) CFL の値 = 1.44

(f) CFL の値 = 1.6

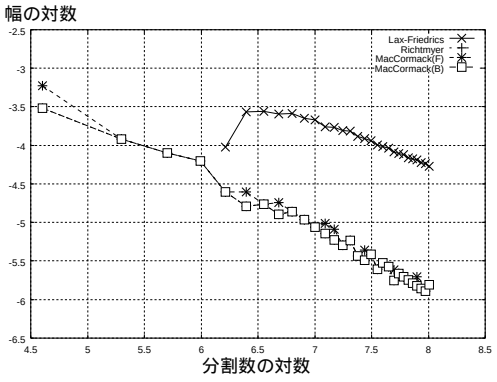
Fig. 4.13 閾値 −10 で分割数を変化させていった図



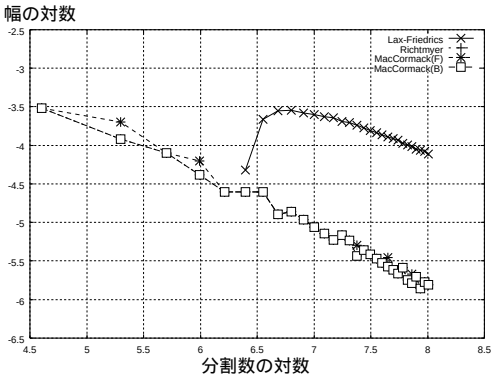
(a) CFL の値 = 0.8



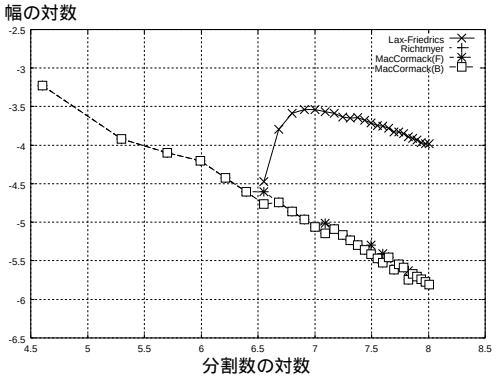
(b) CFL の値 = 0.96



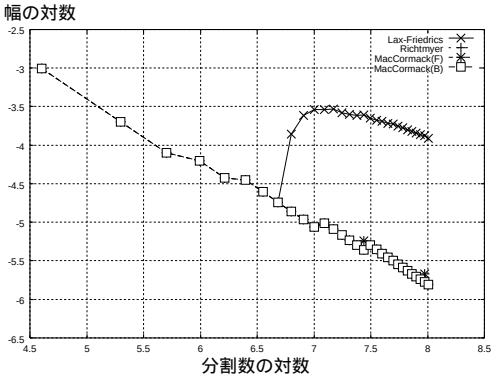
(c) CFL の値 = 1.12



(d) CFL の値 = 1.28



(e) CFL の値 = 1.44



(f) CFL の値 = 1.6

Fig. 4.14 Fig.4.13 の両軸を対数にした図

5 まとめ

非粘性 Burgers 方程式について、一次精度の Lax-Friedrics 法、二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法 (前進差分)、MacCormack 法 (後退差分) の 4 種類の差分で行った長時間計算後の数値計算結果を用いて、それらを数値的に比較するための幾つかの指標について考察した。

本研究を始める前は、衝撃波は発生直後から衝撃波でなくなるまで直線的であり、それらの傾きを調べることにより、一次精度と二次精度の差分の精度の対応付けが出来るのではないかと考えていた。しかし実験の結果、衝撃波は滑らかな曲線で表されていることが分かり、閾値によって傾きの値が大きく異なってしまった。そのため、衝撃波の傾きは、回帰直線ではなく回帰曲線を用いるなどしなければ比較に使えないのではないかということが分かった。

傾きの最小値での比較については、二次精度の差分の傾きの最小値が分割数に対して、二次関数的ではなく直線的に減少していくという結果から、うまく差分の対応付けが出来るのではないかと考えられたが、傾きの最小値から求めた関係式によって対応していたものと L^2 ノルムを用いて対応付けたものが違うものになってしまった。このことから、全ての値について比較したわけではないが、この方法は一次精度と二次精度の差分の比較には使えないのではないかという結論に達した。

また、衝撃波の幅による比較だが、こちらも傾きの最小値での比較と同じく、衝撃波の幅から求めた関係式によって対応していたものと L^2 ノルムを用いて対応付けたものが違うものになってしまったため、やはり使えないのではないかと考えられる。

結果として、今回考察した 3 種類の比較方法では一次精度と二次精度の差分の精度の対応付けをするところまでは至らなかったが、衝撃波の傾きの最小値と CFL 条件の値、分割数の関係、そして衝撃波の幅と分割数の関係を式で表すことができた。

本来ならば、衝撃波の傾きに回帰曲線などを用いた結果を考察したり、その他のきちんと対応付けのできる方法を見つけるべきであったが、本研究では時間が無くどちらも行うことができなかった。

今後の課題としては、衝撃波の傾きに回帰曲線を用いて一次精度と二次精度の差分の比較を行うこと、その他のきちんと対応付けの出来る比較方法を見つけること、L^2 ノルムだけでなく他の比較の確認方法を考えることなどがあげられる。

参考文献

[1] 木原 涼子: “非粘性バーガース方程式の大きい時間幅に対する数値計算”, 新潟工科大学卒業論文,pp1–32 (1999)

[2] 大川戸 太郎: “周期的外力を持つ非粘性バーガース方程式の倍周期解の自動判別法”, 新潟工科大学卒業論文,pp1–25 (1998)

[3] 河村 哲也: キーポイント 偏微分方程式 (岩波書店,1997)

[4] 河村 哲也: 応用偏微分方程式 (共立出版株式会社,1998)

[5] 高見 穎郎, 河村 哲也: 偏微分方程式の差分解法 (東京大学出版会,1994)

[6] 棚橋 隆彦: はじめての CFD —移流拡散方程式— (コロナ社, 1996)

[7] 日本機械学会 編: 流れの数値シュミレーション (コロナ社,1988)

[8] 山口 昌哉, 野木 達夫: 数値解析の基礎 (共立出版株式会社, 1969)

[9] 日本数学会 編:岩波 数学辞典 第 3 版 (岩波書店,1985)

[10] 新田 哲也: “気体力学方程式の高精度差分法による数値解析”, 新潟大学工学部卒業論文,pp1–25 (1995)

[11] 竹野 茂治: “単独保存則方程式の周期解の数値解析”, 新潟工科大学紀要 第 2 号,pp19–26 (1997)

[12] 一松 信, 竹之内 脩 編: 新数学事典 (大阪書籍株式会社,1991)

[13] 西田 孝明, 川島 秀一: “気体の運動方程式”, 非線形の現象と解析 (山口 昌哉 編),pp135–160 (日本評論社,1996)