非粘性バーガース方程式の大きい時間幅に対する数値計算

平成 12 年 2 月 15 日

情報電子工学科 竹野研究室
木原 涼子

目 次

1 はじめに **1**

2 微分方程式の差分法 **1**
2.1 差分 (商) 1
2.1.1 一変数関数の差分 (商) 1
2.1.2 二変数関数の差分 (商) 3
2.2 差分法とは 4

3 単独保存方程式に対する差分法 **8**
3.1 バーガース方程式に対する数値計算 8
3.2 Lax-Friedrichs 法 9
3.2.1 Lax-Friedrichs 法 9
3.2.2 境界部分での計算 9
3.2.3 安定条件 11
3.3 Lax-Wendroff 法 15
3.3.1 Richtmyer 法 16
3.3.2 MacCormack 法 17
3.4 陰的差分 18

4 数値計算結果および考察 **23**
4.1 外力なしの数値計算結果と考察 23
4.2 外力を付け加えた数値計算結果と考察 26

5 あとがき **31**

参考文献 **32**

概要

本稿では、非粘性バーガース方程式という非線形単独双曲型偏微分方程式に対して、様々な差分法で数値計算を行っていく。そして、長時間後の数値計算結果を精度良く、なおかつ少ない計算量で求める差分法を検討していくことにする。周期解などの性質を調べる場合、長時間計算が必要になる。また、短時間計算では精度の良い差分は知られているが、長時間計算した結果の良い差分近似についてはあまり知られていない。検討する差分法は、一次精度の Lax-Friedrichs 法と、二次精度の Richtmyer 法、前進差分を用いた MacCormack 法、後退差分を用いた MacCormack 法である。また、差分近似する非粘性バーガース方程式に時間周期外力をつけたものについても数値計算を行い、周期解の研究にどれが向いているのか比較検討していく。

1　はじめに

非粘性バーガース方程式などを含む非線形双曲型偏微分方程式については、まだ、数学的に知られていないことが大変多く、例えば、厳密な解の形もまだよく知られていない。非粘性バーガース方程式などを数値計算する場合、差分法という解法がよく用いられている。

例えば、Lax-Friedrichs 法による差分では、一次精度のため、精度はそれほど良くないが計算は楽である。しかし、長時間後の計算をしようとすると、誤差により、粘性効果が発生したりする。そこで、分割幅を小さくして数値計算を行うと、粘性効果は少なくなるのだが、安定条件を考慮すると、長時間後の計算をするのに、多くの計算量を要してしまう。

本研究の目的は、差分法に安定性を持たせ、なおかつ、長時間後の差分近似結果を精度よく得る差分法を検討するのが目的である。

本稿では、2 章で差分法がどの様なものであるかについてを記述し、非粘性バーガース方程式の様々な差分法を 3 章で紹介する。なお、4 章ではそれらの数値計算を実際に比較し、考察していく。

2　微分方程式の差分法

2.1　差分 (商)

2.1.1　一変数関数の差分 (商)

微分の定義から

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.1}$$

が成り立つ。du/dx に対して右辺の第一項を差分商と言う。(ここで、$\Delta x (= h$ とおく) が十分小さいと考える。) また、この右辺の第一項を前進差分 (商)(図 2.1 中 PQ で近似したもの) と呼ぶ。

これは、点 P での接線の傾き (微分) を隣接する 2 点 P, Q を通る直線の傾きで近似していて、着目点より前方 (右側) の点を使った近似であるのでこのように呼ばれている。

この他にも、

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h) \tag{2.2}$$

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2) \tag{2.3}$$

などがあり、それぞれ、後退差分 (商)(図 2.1 中 RP の傾き)、中心 (中央) 差分 (商)(図 2.1 中 RQ の傾き) と呼ばれる。

次に、実際に差分式を導出する。まず、h が十分小さいと考えて、テイラー展開を行う。

$$u(x \pm h) = u(x) \pm \frac{h}{1!}\frac{du}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} \pm \frac{h^3}{3!}\frac{d^3u}{dx^3} + \cdots \tag{2.4}$$

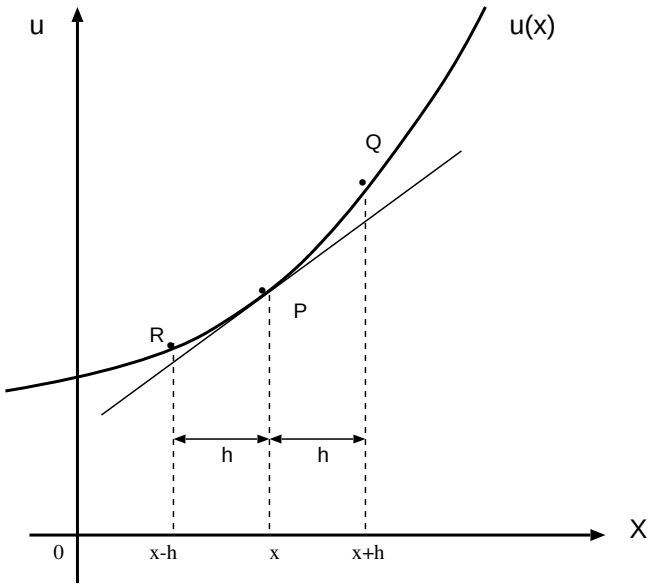


Fig. 2.1 微分と各差分の幾何学的な関係

両辺を h で割り、

$$\frac{u(x+h)}{h} = \frac{u(x)}{h} + \frac{du}{dx} + h\frac{d^2u}{dx^2} + h^2\frac{d^3u}{dx^3} + \cdots \tag{2.5}$$

du/dx について解いていくと、

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \left(-\frac{h}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{h^2}{3!}\frac{d^3u}{dx^3} - \cdots\right) \tag{2.6}$$

となる。ここで、右辺の第二項以降

$$-\left(\frac{h}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} + -\frac{h^2}{3!}\frac{d^3u}{dx^3} + \cdots\right)$$

に注目してみる。ここで、h は十分小さいので、最も絶対値の大きな項は h が含まれている項であるといえる。すなわち、この項は $O(h)$ となる。なお、$O(h)$ は h が小さいとき、およそ h のオーダーの大きさになることを示す記法である。この $O(h)$ が差分近似したときの誤差を示している。また、この様に、h の一乗のオーダの誤差の差分を一次精度の差分と言う。これによって式 (2.1) を導くことができる。

後退差分に関しても同様に、

$$\frac{u(x-h)}{h} = \frac{u(x)}{h} - \frac{du}{dx} + h\frac{d^2u}{dx^2} - h^2\frac{d^3u}{dx^3} + \cdots \tag{2.7}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x-h) - u(x)}{h} + \left(-\frac{h}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{h^2}{3!}\frac{d^3u}{dx^3} - \cdots\right) \tag{2.8}$$

と、計算を進めていくと式 (2.2) を導くことができる。

また、中心差分においては、式 (2.4) の $u(x+h)$ から $u(x-h)$ を引くと、

$$u(x+h)-u(x-h)=2h\frac{du}{dx}+\frac{2h^3}{3!}\frac{2h^3}{3!}+\frac{2h^5}{5!}\frac{d^5u}{dx^5}+\cdots \tag{2.9}$$

両辺を $2h$ で割り、du/dx について解くと

$$\frac{du}{dx}=\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+\Big(-\frac{h^2}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}-\frac{h^4}{5!}\frac{d^5u}{dx^5}-\cdots\Big) \tag{2.10}$$

のようになる。ここでまた、右辺の第二項以降を注目すると、最も絶対値が大きな項が今度は、h^2 が含まれている項であることがわかる。よって誤差が、h^2 のオーダーであり、式 (2.3) が導かれることがわかる。また、これらのことから、前進差分、後退差分よりも中心差分のほうが誤差が小さく精度が良いことがわかる。また、h の二乗のオーダーの誤差の差分を二次精度の差分と呼ぶ。

2.1.2　二変数関数の差分 (商)

まず、x 軸における Δx を h、t 軸における Δt を k とする。偏微分方程式 $u(x,t)$ についても一変数関数のときと同様に、テイラー展開

$$\begin{aligned}u(x+h,t+k)=u(x,t)+\frac{1}{1!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial t}\Big)u(x,t)+\frac{1}{2!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial t}\Big)^2u(x,t)\\+\frac{1}{3!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial t}\Big)^3u(x,t)+\cdots\end{aligned} \tag{2.11}$$

より差分商は、

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}+O(h) & (\text{前進差分})\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k}+O(k)\end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}+O(h) & (\text{後退差分})\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k}+O(k)\end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h}+O(h^2) & (\text{中心差分})\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{u(x,t+k)-u(x,t-k)}{2k}+O(k^2)\end{cases} \tag{2.14}$$

と導くことができる。

2.2 差分法とは

差分法 (**finite-difference method**) とは、微分方程式の数値解法の一種で、簡単にいえば、微分方程式の微分 (商) を差分 (商) に置き換えて得られる差分方程式を解き、もとの微分方程式の近似解を得る方法のことをいう。

また、差分法は偏微分方程式の直接解法であり、実用的な意味で「どんな方程式も解ける」と言えるものとしては、おそらく差分法が唯一のものであると考えられる。さらに、差分法の計算プロセスは純粋に数値的であって、数式処理や記号処理を必要としない。この意味でも差分法はコンピュータに適した解法であると言える。

例として、独立変数 x の関数 $u = u(x)$ に対する常微分方程式

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \qquad (x > 0) \tag{2.15}$$

を、条件

$$u(0) = a \tag{2.16}$$

のもとで解くという問題を考える。ここで定数 a を関数 u の初期値、式 (2.16) で表される条件を初期条件という。そしてこの型の問題を微分方程式 (2.15) の初期値問題と呼ぶ。差分法を用いたもっとも簡単な近似を得るためには、式 (2.15) の左辺の微分を前進差分で置き換えればよい。このとき、式 (2.15) は、

$$\frac{\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)}{h} = f(x, \tilde{u}(x)) \tag{2.17}$$

で近似される。これを解いて得られる解は一般に厳密な解ではない。そこで $\tilde{u}$ と書いて u と区別している。式 (2.17) は、

$$\tilde{u}(x+h) = \tilde{u}(x) + hf(x, \tilde{u}(x)) \tag{2.18}$$

と書き換えられる。これは、x での $\tilde{u}$ の値を用いて右辺を計算すると、$x+h$ での $\tilde{u}$ の値が求まることを意味している。

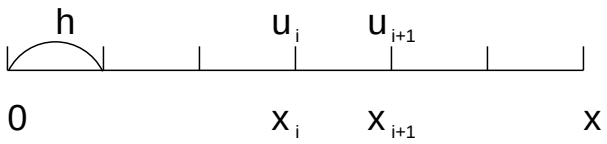


Fig. 2.2 差分格子と変数の記法

さて、図 2.2 に示すように、x 軸を $x = 0$ からはじめて、幅 h の格子に区切っていく。この区切りをつけた点を格子点と呼ぶ。

原点を 0 番目の格子点として、x が増加する方向に格子点に番号をつけていき、i 番目の格子点の、x 座標を x_i、そこでの厳密解 u の近似値 $\tilde{u}(x_i)$ を簡単に u_i と記すことにすると、その右どなりの格子点の x 座標および u の近似値は x_{i+1}、u_{i+1} となる。

このとき、式 (2.18) に示した近似式は、点 x_i において

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i) \tag{2.19}$$

と書くことが出来る。また、初期条件 (2.16) は $u_0 = a$ となるため、これを式 (2.19) で $i = 0$ とおいた式に代入して u_1 が求まる。同様にして、式 (2.19) を $i = 1, 2, \cdots$ と変化させて繰り返し用いれば、u_i は、

$$u_0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots$$

と順に次々と求められる。この計算のしくみを幾何学的に示すと図 2.3 のようになる

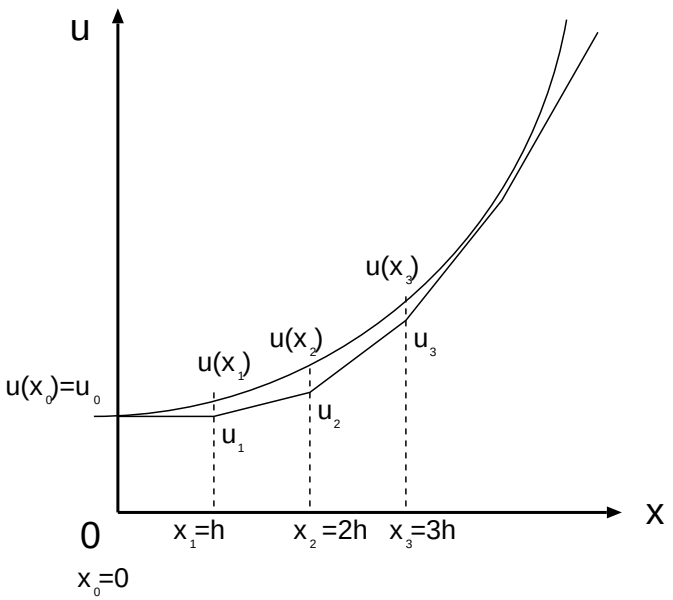


Fig. 2.3 解曲線を折れ線で近似した図

偏微分方程式の差分も同様に考えることができる。まず、空間変数 x と時間変数 t の関数 $u = u(x, t)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t > 0, \quad 0 < x < 1) \tag{2.20}$$

を、初期条件

$$u(x, 0) = \varphi(x) \qquad (0 < x < 1), \tag{2.21}$$

および境界条件

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0 \qquad (t>0) \tag{2.22}$$

のもとで解くことを考える。ここで、$\varphi(x)$ は与えられた関数である。$x-t$ 面における半無限長方形領域 $0 \leq x \leq 1$、$t \geq 0$ の上に、t 軸に平行な直線群 $x=x_j=jh(j=0,1,2,\cdots,J; Jh=1)$ と x 軸に平行な直線群 $t=t_n=nk(n=0,1,2,\cdots)$ を描いて、この領域を 2 辺の長さがそれぞれ h と k の小さい格子に分割する (図 2.4)。格子点で座標が $(x_j,t_n)=(jh,nk)$ であるものを P_j^n で表す。この記号 P_j^n の上の添字 n は t 軸に平行な方向に上向きに数えた格子の番号、下の添字 j は x 軸に平行な方向に右向きに数えた格子点の番号である。我々が知りたいのは各格子点における関数値 $u(x_j,t_n)(j=1,2,\cdots,J-1; n=1,2,3,\cdots)$ であるが、それを正確に計算することは一般にはできないので、それに代わるものとしてその近似値 $u_j^n(j=1,2,\cdots,J-1; n=1,2,3,\cdots)$ を求めることにする。ただし、近似値を表す記号 u_j^n の上下の添字は、格子点を示す P_j^n の場合と同じ意味であるとする。

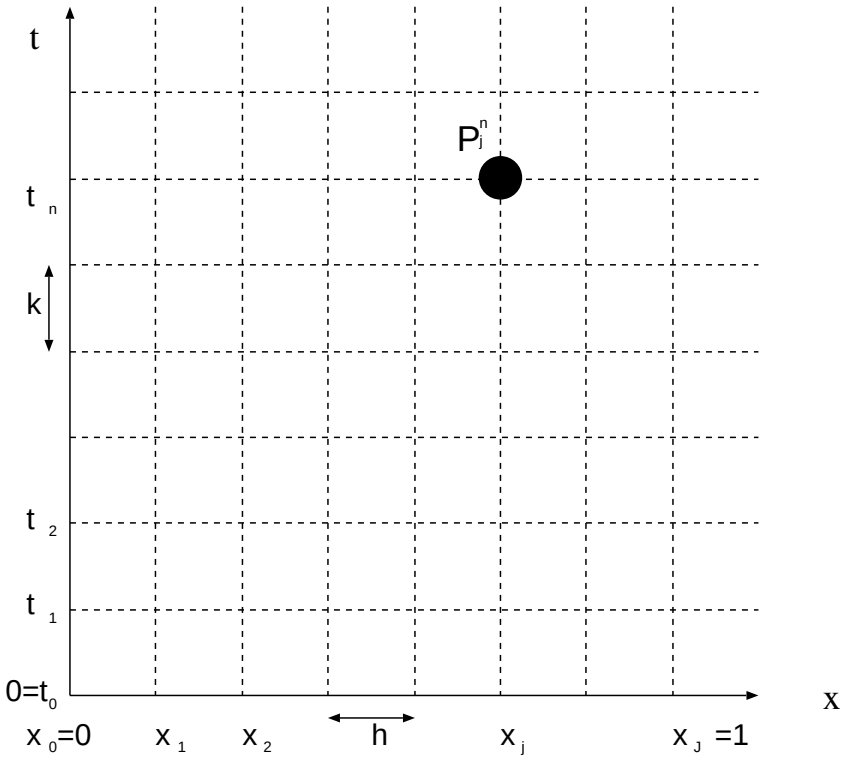


Fig. 2.4 差分法を適用するための格子

さて、常微分方程式のときと同様に、偏導関数 $\partial u/\partial t$ の格子点 P_j^n における差分商につ

いて考えると、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \tag{2.23}$$

で近似する。同じ点での $\partial^2 u/\partial x^2$ の差分商は、テイラー展開の式 (2.11) より、$u(x+h,t)+u(x-h,t)$ を計算すると、

$$u(x+h,t) + u(x-h,t) = 2u(x,t) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots \tag{2.24}$$

となり、両辺を h^2 で割り、

$$u(x+h,t) + u(x-h,t) = 2u(x,t) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4) \tag{2.25}$$

と書け、$\partial^2 u/\partial x^2$ について解けば、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2) \tag{2.26}$$

となる。これは 2 階の中心差分式である。偏微分方程式 (2.20) に従うと式 (2.23) と式 (2.26) より、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \tag{2.27}$$

という差分方程式を得る。この式は、$r = k/h^2$ とおいて

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j+1}^n \qquad (j = 1, 2, \cdots, J-1, n \geq 1) \tag{2.28}$$

と書くことができる。式 (2.28) は t_{n+1} での u の近似値が、t_n での u の近似値から代入計

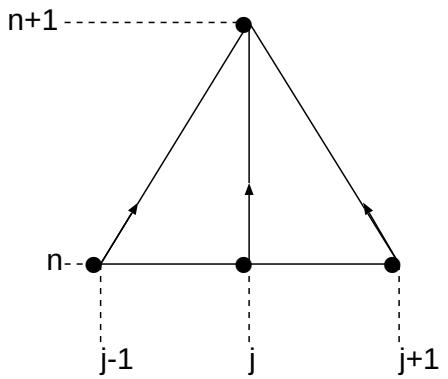


Fig. 2.5 差分方程式 2.28 の構造

算によって直ちに計算できることを示しており、陽的解法 **(explicit method)** と呼ばれる。式 (2.28) の差分式の構造を図 2.5 に示す。

したがって、時間 t_{n+1} での u の値が時間 t_n での値を使って図 2.4 のようにして境界以外の点においてすべて定まる。なお境界での値はすでに境界条件 (2.22) として与えられているため計算する必要はない。$n=0$ での u は初期条件で与えられているため、式 (2.28) から $n=1$ での u が定まり、$n=1$ での u の値から $n=2$ の u の値が定まるというように、n を順に増やしていけば、計算領域のすべての格子点で u の値が定まることになる。

3　単独保存方程式に対する差分法

3.1　バーガース方程式に対する数値計算

流体の運動を記述する方程式の中で最も簡単な方程式としてバーガース方程式

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = au_{xx} \qquad (a>0) \tag{3.1}$$

がある。また、このバーガース方程式の拡散項 au_{xx} を無視したもの

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \tag{3.2}$$

非粘性バーガース方程式という。この方程式は

$$u_t + uu_x = 0 \tag{3.3}$$

と書くこともできる。

本稿では非粘性バーガース方程式の、領域 $\{(x,t); 0<x<1, t>0\}$ での初期値境界値問題

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & (0<x<1) \\ u(0,t) = u(1,t) & (t>0) \end{cases} \tag{3.4}$$

を考えることとする。

このバーガース方程式 (3.2) を解く差分法としては、陽的解法としてオイラー前進法、Lax-friedrichs 法、Lax-Wendroff 法、ルンゲ・クッタ法などがあり、陰的解法としてはクランク・ニコルソン法、上流差分法、風上差分法などが挙げられる。

参考文献 [1] に見られるような周期解の数値計算を行う場合、非常に長い時間幅に対する計算が必要になる。そこでは、Lax-Friedrichs 法を使っているが、Lax-Friedrichs 法は安定条件が厳しいことと粘性効果が強いため、長時間後の計算を精度良く得るためには、非常に大きい計算量が必要となり、あまり向いていないと思われる。また、長時間計算の目的のためには、高精度の差分が向いているかどうか、よくは知られていないようである。

本研究では、陽的差分としては Lax-Friedrichs 法と Lax-Wendroff 法を用いて数値計算を行う。また、Lax-Wendroff 法として、Richtmyer 法と MacCormak 法を紹介し、検証する。さらに陰的差分がバーガース方程式に対して使えるかどうかも検証する。

それらをもとに、これらの差分法が、本研究で扱う非粘性バーガース方程式に対してどれだけ厳密解に近く近似ができるか、そして、一番の目的である、少ない計算量で長時間後の差分近似精度が良いものはどれかなどについて数値計算し考察していく。

3.2 Lax-Friedrichs 法

3.2.1 Lax-Friedrichs 法

Lax-Friedrichs 法とは, 時間微分は、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \tag{3.5}$$

となり、前進差分式 (3.5) を使うかわりに、

$$\frac{u_j^{n+1} - \dfrac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{k} \tag{3.6}$$

で置き換え、空間微分を普通の中心差分で置き換えるものである。$(u_j^n = u(x_j, t_n))$

すなわち、

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{k} + \frac{(u_{j+1}^n)^2/2 - (u_{j-1}^n)^2/2}{2h} = 0 \tag{3.7}$$

となる。これを、u_j^{n+1} について解くと、

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{k}{2h}\{\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2}\} \tag{3.8}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, J)$$

Lax-Friedrichs 法を図示すると図 3.1 のようになる。

図 3.1 を見てわかるように、2 点 P_{j+1}^n, P_{j-1}^n での u の値から点 P_j^{n+1} での u の値が求められる。しかし、u_0^1 の計算では P_1^0 の 1 点での値しか与えられていないので u_0^1 の値は求められない。

3.2.2 境界部分での計算

前節で述べたが、境界部分での u の値は上記の方法では求められない。しかし、境界部分での u の値は条件 (3.4) より求められる。x が 0 と 1 のときは、t が正ならば t はどの値でも u の値は同じである。図 3.1 では、J が 4 のときに x が 1 となるので、

$$u_0^1 = u_4^1 \tag{3.9}$$

が成り立つ。よって次のように考える。式 (3.9) より、u_4^1 を求める場合、 図 3.1 を右に 1 移動させる。すなわち、$1 \leq x \leq 2$ の範囲に $0 \leq x \leq 1$ の範囲のものをつけたす。そうすることにより、x_5 での u の値が u_1^0 として与えられ、それによって u_4^1 が求められる (図 3.2)。u_0^1 を求める場合も同様、今度は、図 3.1 を左に 1 移動させ、$-1 \leq x \leq 0$ の範囲につけたす。したがって、x_{-1} での u の値が u_3^0 として与えられ、それによって u_0^1 が求められる (図 3.3)。

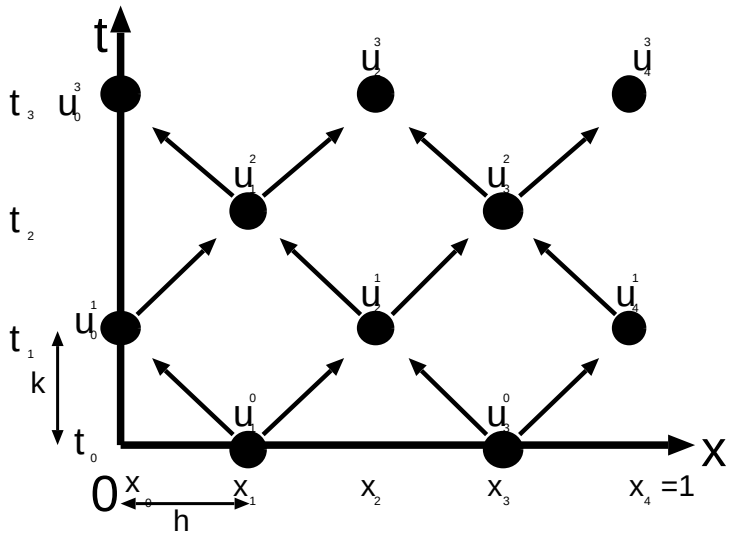


Fig. 3.1 Lax-Friedrichs 法

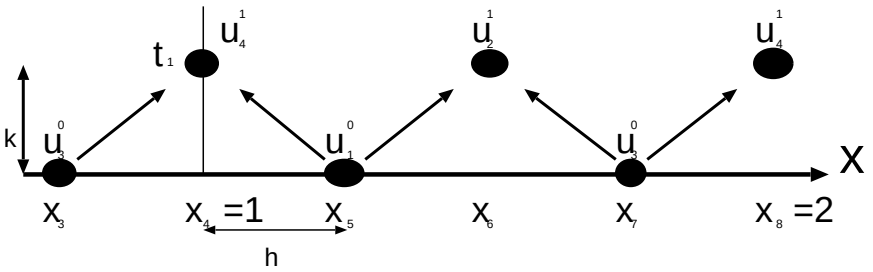


Fig. 3.2 境界値 u_4^1 の求め方

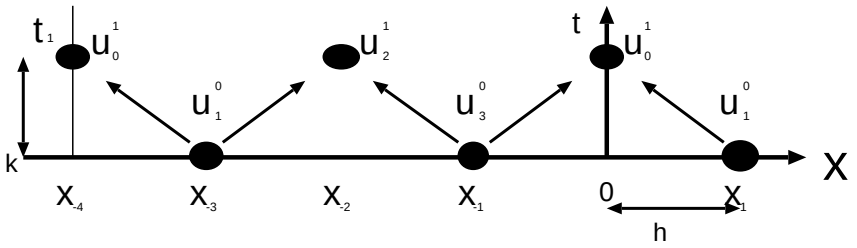


Fig. 3.3 境界値 u_0^1 の求め方

3.2.3 安定条件

差分近似解には安定性という概念がある。数値計算では、真の解はそうではないのに、近似解は激しく振動して計算許容範囲を超えてしまう現象がよく起こる。そのような状態を不安定と呼んでいる。よって安定というのは近似解が「おとなしく納まっている」といった状態なので、近似解が真の解に近づいているか (収束性) ということは直接関係が無いはずであるが、ある条件のもとでは、安定性と収束性は同値である (Lax の同等定理)[12] ことが知られている。

安定性は、差分の選び方、パラメータのとり方などによってかわるが、線形の方程式の差分近似に対してはフーリエ変換を使って考察を行うことができる。しかし、非線形の方程式の場合は、線形の方程式に対する結果から推測される条件を安定条件と呼んでいるにすぎず、必ずしも厳密な議論が行われているわけではない。

なお、安定性の解析には、フーリエ変換の手法を簡便化した Neumann の判定法 [8] というものが使われることもある。バーガース方程式を含む一般の単独保存則方程式

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \quad (0 < x < 1, t > 0) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad (0 < x < 1) \end{cases} \tag{3.10}$$

式 (3.10) は $f(u)_x = f'(u)u_x$ であることを使って

$$u_t + f'(u)u_x = 0 \tag{3.11}$$

の形に書くことができる (u が x 方向に滑らかである場合)。いま、u_x の係数 u を α とおいた線形の方程式

$$u_t + \alpha u_x = 0 \tag{3.12}$$

に対する差分の安定条件を考えてみることにする。

実数全体で定義された関数 $g(x)$ に対して

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{3.13}$$

を、g のフーリエ変換という。$\widehat{g}(\omega)$ は ω の関数であり、$g(x)$ を電気信号 (x : 時刻) と見れば $\widehat{g}(\omega)$ はその信号の周波数 ω の成分を表していると見ることもできる。

$$\begin{aligned} (g(x+a))^{\wedge} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x+a)e^{-ix\omega}dx \qquad (x+a=y \text{ とおく}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\omega+ia\omega}dy \\ &= e^{ia\omega}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\omega}dy \\ &= e^{ia\omega}\widehat{g}(\omega) \end{aligned}$$

より

$$(g(x+a))^{\wedge}(\omega) = e^{ia\omega}\widehat{g}(\omega) \tag{3.14}$$

式 (3.12) の差分化として

$$\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} + \alpha\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} = 0 \tag{3.15}$$

を考える。つまり、漸化式として

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k} + \alpha\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h} = 0 \tag{3.16}$$

とするような差分を考える。式 (3.15) を x に関してフーリエ変換する。フーリエ変換は線形、すなわち

$$(c_1g_1(x)+c_2g_2(x))^{\wedge} = c_1\widehat{g_1}+c_2\widehat{g_2} \qquad (c_1,c_2:\text{定数}) \tag{3.17}$$

なので

$$\frac{\widehat{u}(\omega,t+k)-\widehat{u}(\omega,t)}{k} + \alpha\frac{(u(x+h,t))^{\wedge}-\widehat{u}(\omega,t)}{h} = 0 \tag{3.18}$$

となる。ここで $\widehat{u}(\omega,t)$ は

$$\widehat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\omega}dx \tag{3.19}$$

とする。式 (3.14) により

$$(u(x+h,t))^{\wedge} = e^{ih\omega}\widehat{u}(\omega,t)$$

なので結局

$$\frac{\widehat{u}(\omega,t+k)-\widehat{u}(\omega,t)}{k} + \alpha\frac{e^{ih\omega}\widehat{u}(\omega,t)-\widehat{u}(\omega,t)}{h} = 0 \tag{3.20}$$

となり、よって

$$\begin{cases} \widehat{u}(\omega,t+k) = \beta\widehat{u}(\omega,t) \\ \beta = 1-\alpha\dfrac{k}{h}(e^{i\omega h}-1) \end{cases} \tag{3.21}$$

となる。β は t には関係しないので、t のかわりに $t+k$ を式 (3.21) に代入すれば

$$\widehat{u}(\omega,t+2k) = \beta\widehat{u}(\omega,t+k) = \beta^2\widehat{u}(\omega,t) \tag{3.22}$$

などとなり、よって

$$\widehat{u}(\omega,t+mk) = \beta^m\widehat{u}(\omega,t) \tag{3.23}$$

のようになることがわかる。複素数 β^m は

$$\begin{array}{ll} |\beta| < 1 \Longrightarrow & \beta^m \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty) \\ |\beta| > 1 \Longrightarrow & \beta^m \longrightarrow \text{振動しながら } \infty \text{ に発散 } (m \to \infty) \\ |\beta| = 1 \Longrightarrow & |\beta^m| = 1, \quad (\text{振動はするがおさまっている})(m \to \infty) \end{array} \tag{3.24}$$

のようになるので、結局この差分の場合

$$|\beta| \leq 1 \Longrightarrow \text{安定}, \qquad |\beta| > 1 \Longrightarrow \text{不安定}$$

となることがわかる。Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3.25}$$

と、複素数の絶対値

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.26}$$

を使って、$|\beta| \leq 1$ である条件を調べてみる。

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - \alpha\frac{k}{h}(e^{i\omega h} - 1) \\ &= 1 - \mu(\cos\theta + i\sin\theta - 1) && (3.27) \\ &= 1 + \mu - \mu\cos\theta - i\mu\sin\theta && (3.28) \\ &\quad (\mu = \alpha\frac{k}{h}, \quad \theta = \omega h \text{ とおいた}) && (3.29) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} |\beta|^2 &= (1 + \mu - \mu\cos\theta)^2 + \mu^2\sin^2\theta \\ &= (1+\mu)^2 - 2\mu(1+\mu)\cos\theta + \mu^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= 1 + 2\mu + 2\mu^2 - 2\mu(1+\mu)\cos\theta \end{aligned} \tag{3.30}$$

よって

$$\begin{aligned} |\beta|^2 - 1 &= 2\mu(1+\mu) - 2\mu(1+\mu)\cos\theta \\ &= 2\mu(1+\mu)(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{3.31}$$

より、$1 - \cos\theta \geq 0$ であるので、$|\beta| \leq 1$、すなわち $|\beta|^2 - 1 \leq 0$ となるのは $2\mu(1+\mu) \leq 0$ のとき、すなわち $-1 \leq \mu \leq 0$ のときであることが分かる。よって

$$-1 \leq \alpha\frac{k}{h} \leq 0$$

のときに安定となる。これは、$\alpha < 0$ であるときに成り立ち、しかも h をあまり大きくはとれないことを意味する。このような k、h に関する安定条件を **CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy 条件)** と呼ぶ。

次に、この 3.2.1 節で扱っている Lax-Friedrichs の安定条件について考えてみる。

$$\frac{u(x,t+k)-\dfrac{u(x+h,t)+u(x-h,t)}{2}}{k}+\alpha\frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h}=0 \tag{3.32}$$

x に関してフーリエ変換するとこの場合は

$$\frac{\hat{u}(\omega,t+k)-\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\hat{u}(\omega,t)}{k}+\frac{\alpha}{h}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\hat{u}(\omega,t)=0 \tag{3.33}$$

となり、これを解いていくと

$$\begin{aligned}
&\frac{\hat{u}(\omega,t+k)-\cos\theta\hat{u}(\omega,t)}{k}=-\frac{\alpha}{h}i\sin\theta\hat{u}(\omega,t)\\
&\hat{u}(\omega,t+k)-\cos\theta\hat{u}(\omega,t)=-\alpha\frac{k}{h}i\sin\theta\hat{u}(\omega,t)\\
&\hat{u}(\omega,t+k)=\cos\theta\hat{u}(\omega,t)-\alpha\frac{k}{h}i\sin\theta\hat{u}(\omega,t)\\
&\hat{u}(\omega,t+k)=\hat{u}(\omega,t)\Big(\cos\theta-\alpha\frac{k}{h}i\sin\theta\Big)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

より、

$$\beta=\cos\theta-i\mu\sin\theta \tag{3.35}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
|\beta|^2-1 &= \cos^2\theta+\mu^2\sin^2\theta-1\\
&=(\mu^2-1)\sin^2\theta\le 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

より $\mu^2\le 1$、すなわち $|\mu|\le 1$ が安定条件。ゆえに式 (3.32) は

$$|\alpha|\frac{k}{h}\le 1 \tag{3.37}$$

のときに安定である。

次に、本研究で扱っている非線形の場合について考えてみると、

$$\alpha=f'(u) \tag{3.38}$$

と考えると式 (3.11) は

$$\frac{u(x,t+k)-\dfrac{u(x+h,t)+u(x-h,t)}{2}}{k}+\frac{f(u(x+h,t))-f(u(x-h,t))}{2h}=0 \tag{3.39}$$

と定義され、

$$\frac{u(x,t+k)-\dfrac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2}}{k}+f'(\bar{u}(x,t))\frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h}=0$$
$$\left(\bar{u}\text{は例えば}\bar{u}=u(x,t),\bar{u}=\frac{u(x+h,t)+u(x-h,t)}{2}\text{など}\right) \tag{3.40}$$

と定義されるのではない。しかし、平均値の定理により

$$f(u(x+h,t))-f(u(x-h,x))=f'(\tilde{u})\{u(x+h,t)-u(x-h,t)\}$$
$$(\tilde{u}\text{は}\,u(x+h,t)\,\text{と}\,u(x-h,t)\,\text{の間のある値}) \tag{3.41}$$

となるので大差はない。しかし、式 (3.39) が採用されるのは、式 (3.39) は保存性を持っていいるからである。結局、式 (3.39) を使うときは、CFL 条件

$$|f'(u(x,t))|\frac{k}{h}\leq 1 \tag{3.42}$$

が必要であることになる。

3.3 Lax-Wendroff 法

これまでは、時間増分 k に関して一次精度の差分をしてきた。この時間増分を二次精度にして求める方法を **Lax-Wendroff** 法という。これは、テイラー展開より、

$$u(x,t+k)=u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial t}k+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+O(k^3) \tag{3.43}$$

を用いる方法である。ここで、式 (3.12) より

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\alpha\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.44}$$

を代入する。

$$u(x,t+k)=u(x,t)-k\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{k^2}{2}\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(k^3) \tag{3.45}$$

この右辺において、空間微分を中心差分で置き換えると、

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{k\alpha}{2h}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+\frac{k^2\alpha^2}{2h^2}(u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n) \tag{3.46}$$

と書くことができる。そして、安定条件を考えてみる。

$$\begin{aligned}u(x,t+k) &= u(x,t)-\frac{k}{2h}\alpha\{u(x+h,t)-u(x-h,t)\}\\ &\quad+\frac{k^2}{2h^2}\alpha^2\{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)\}\end{aligned} \tag{3.47}$$

式 (3.47) を x に関してフーリエ変換 $\left(\dfrac{k}{h}\alpha = \mu, \quad \theta = h\omega\text{とおく}\right)$ すると、

$$\begin{aligned}
& \hat{u}(\omega, t+k) \\
= \; & \hat{u}(\omega,t) - \frac{\mu}{2}\{e^{i\theta}\hat{u}(\omega,t) - e^{-i\theta}\hat{u}(\omega,t)\} + \frac{\mu^2}{2}\{e^{i\theta}\hat{u}(\omega,t) - 2\hat{u}(\omega,t) + e^{-i\theta}\hat{u}(\omega,t)\} \\
= \; & \left\{1 - \frac{\mu}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{\mu^2}{2}(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta})\right\}\hat{u}(\omega,t) \\
= \; & \beta\hat{u}(\omega,t)
\end{aligned}$$

となり、β は

$$\begin{aligned}
\beta &= 1 - \frac{\mu}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{\mu^2}{2}(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) \qquad \theta = h\omega \\
&= 1 - i\mu\sin\theta + \mu^2\frac{1}{2}(2\cos\theta - 2) \\
&= (1 - \mu^2 + \mu^2\cos\theta) - i\mu\sin\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\beta|^2 &= (1 - \mu^2 + \mu^2\cos\theta)^2 + \mu^2\sin^2\theta \\
&= (1-\mu^2)^2 + 2(1-\mu^2)\mu^2\cos\theta + \mu^4\cos^2\theta + \mu^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= 1 - \mu^2 + \mu^4 + 2\mu^2(1-\mu^2)\cos\theta + (\mu^4 - \mu^2)\cos^2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\beta|^2 - 1 &= \mu^4 - \mu^2 + 2\mu^2(1-\mu^2)\cos\theta + (\mu^4 - \mu^2)\cos^2\theta \\
&= 2\mu^2(\mu^2-1)(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \\
&= 2\mu^2(\mu^2-1)(1-\cos\theta)^2
\end{aligned}$$

より

$$|\beta|^2 - 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\mu^2(\mu^2-1) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^2 - 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\mu| \leq 1$$

よって、安定条件は

$$\frac{k}{h}|\alpha| \leq 1$$

となり、Lax-Friedrichs 法のときと同じ (3.37) になる。

3.3.1 Richtmyer 法

二段階 Lax-Wendroff 法は、第一ステップで、一次精度の中間的予測値を求め、第二ステップで二次精度の u_j^{n+1} の値を求める予測子修正子法の一つである。ここでは、その中の一つである **Richtmyer** 法について考える。

Richtmyer 法の差分式は

$$\begin{cases} \text{第一ステップ} & u_{j+1/2}^{n+1/2} = \dfrac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \dfrac{k}{2h}\Big(\dfrac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \dfrac{(u_j^n)^2}{2}\Big) \\ \text{第二ステップ} & u_j^{n+1} = u_j^n - \dfrac{k}{h}\Big(\dfrac{(u_{j+1/2}^{n+1/2})^2}{2} - \dfrac{(u_{j-1/2}^{n+1/2})^2}{2}\Big) \end{cases} \tag{3.48}$$

この、Richtmyer 法も安定条件は式 (3.37) である。これらの計算を図示すると図 3.4 の様に説明することができる。

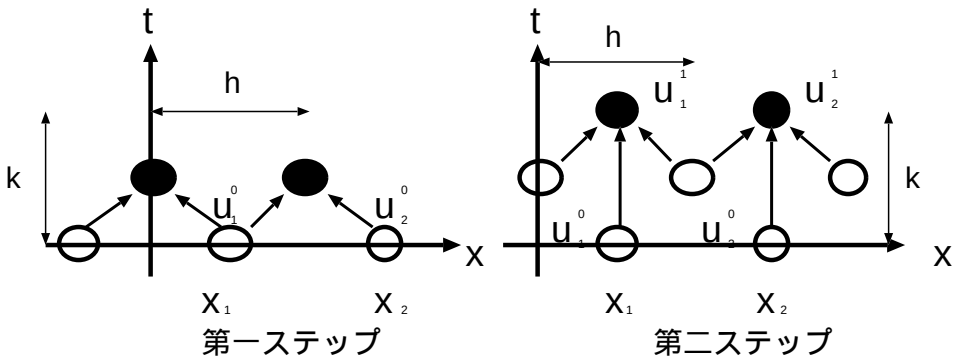


Fig. 3.4 Richtmyer 法

3.3.2 MacCormack 法

MacCormack 法も二段階 Lax-Wendroroff 法の一つである。MacCormack 法は、格子点上の値だけでスキームを記述できるので、境界条件を課すときに、格子中間点 $(j+1/2, n+1/2)$ での境界条件を考える必要がないという利点がある。

MacCormack 法の差分式は前進差分を用いたもの (図 3.5)

$$\begin{cases} \text{第一ステップ} & \tilde{u}_j = u_j^n - \dfrac{k}{h}\Big(\dfrac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \dfrac{(u_j^n)^2}{2}\Big) \\ \text{第二ステップ} & u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \dfrac{k}{2h}\Big(\dfrac{(\tilde{u}_j)^2}{2} - \dfrac{(\tilde{u}_{j-1})^2}{2}\Big) \end{cases} \tag{3.49}$$

や、後退差分を用いたもの (図 3.6)

$$\begin{cases} \text{第一ステップ} & \tilde{u}_j = u_j^n - \dfrac{k}{h}\Big(\dfrac{(u_j^n)^2}{2} - \dfrac{(u_{j-1}^n)^2}{2}\Big) \\ \text{第二ステップ} & u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \dfrac{k}{2h}\Big(\dfrac{(\tilde{u}_{j+1})^2}{2} - \dfrac{(\tilde{u}_j)^2}{2}\Big) \end{cases} \tag{3.50}$$

とがある。なお、安定条件は、式 (3.37) と同じである。

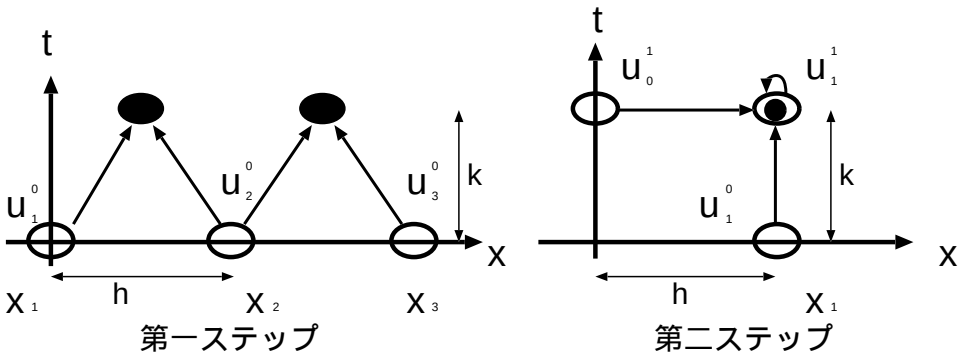


Fig. 3.5 MacCormack 法 (前進差分)

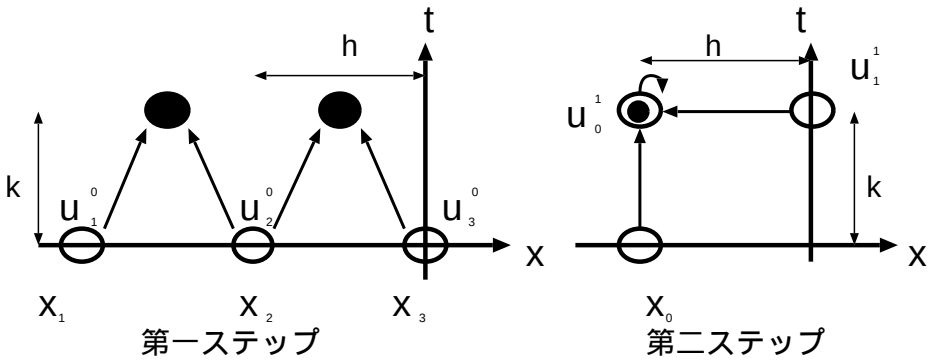


Fig. 3.6 MacCormack 法 (後退差分)

3.4 陰的差分

今まで例を挙げてきた差分法は全て陽的解法であったが、ここでは陰的解法について考えてみる。

式 (2.20) に対して、時間微分の近似に後退差分を用いてみると、

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} = \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} \tag{3.51}$$

すなわち、

$$-ru_{j-1}^n + (1+2r)u_j^n - ru_{j+1}^n = u_j^{n-1} \qquad (j = 1, 2, \cdots, J-1) \tag{3.52}$$

となる。差分方程式 (3.52) の構造を図 3.7 に示す。この図 3.7 から明らかなように、n での 3 点の未知の u の値を $(n-1)$ での既知の 1 点での u の値から決めなければならず、式 (3.52) 単独では解は定まらない。しかし式 (3.52) が $j = 1, 2, \cdots, J-1$ の $(J-1)$ 個の点で成り立つことから $(J-1)$ 元の連立方程式を構成していることに注意すると、未知数は $u_1, \cdots, u_{J-1}$ の $(J-1)$ 個であるから、この方程式を解くことにより解が一通りに定まる。

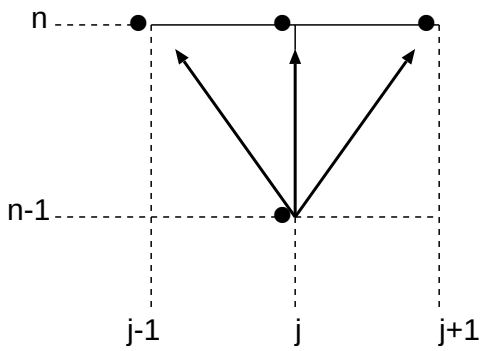


Fig. 3.7 差分方程式 (5.2) の構造

このように、ここで説明した方法は陽解法とは異なり、u の近似値を求めるためには連立方程式を解かなくてはならない。

次に、単独保存則方程式を陰的差分で考え、安定性について調べてみる。

$$\frac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k}+\alpha\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}=0 \tag{3.53}$$

$$\frac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k}+\alpha\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}=0 \tag{3.54}$$

などは、ひとつの式が 2 つの未知数を含んでいるため、この式だけから t での値を求めることはできず、連立一次方程式を解かなければいけない。この差分の安定性をみてみる。式 (3.53) は

$$\hat{u}(\omega,t)-\hat{u}(\omega,t-k)+\mu e^{i\theta}\hat{u}(\omega,t)-\hat{u}(\omega,t)=0 \tag{3.55}$$

となるので

$$\left\{1+\mu(e^{i\theta}-1)\right\}\hat{u}(\omega,t)=\hat{u}(\omega,t-k) \tag{3.56}$$

となる。よって、この場合 β は

$$\beta=\frac{1}{1+\mu(e^{i\theta}-1)}$$

となる。

$$\begin{aligned}|\beta|\le 1 &\Longleftrightarrow \frac{1}{|1+\mu(e^{i\theta}-1)|}\le 1\\ &\Longleftrightarrow |1+\mu(e^{i\theta}-1)|\ge 1\end{aligned} \tag{3.57}$$

であり

$$\begin{aligned} & |1+\mu(e^{i\theta}-1)|^2-1 \\ = \; & |1-\mu+\mu\cos\theta+i\mu\sin\theta|^2-1 \\ = \; & (1-\mu+\mu\cos\theta)^2+\mu^2\sin^2\theta-1 \\ = \; & (1-\mu)^2+2\mu(1-\mu)\cos\theta+\mu^2\cos^2\theta+\mu^2\sin^2\theta-1 \\ = \; & 1-2\mu+\mu^2+2\mu(1-\mu)\cos\theta+\mu^2-1 \\ = \; & -2\mu(1-\mu)+2\mu(1-\mu)\cos\theta \\ = \; & 2\mu(1-\mu)(\cos\theta-1)\geq 0 \end{aligned} \tag{3.58}$$

より $2\mu(\mu-1)\geq 0$、よって $\mu\geq 1$ または $\mu\leq 0$ のときに安定となる。これは、$\alpha\leq 0$ のときには $k>0$、$h>0$ なので常に

$$\mu=\alpha\frac{k}{h}\leq 0$$

となって満たされてしまう。式 (3.54) の方も同様で、結局

式 $(3.53), \alpha\leq 0 \Longrightarrow$ 常に安定

式 $(3.54), \alpha\geq 0 \Longrightarrow$ 常に安定

となることがわかる。陰的差分は、計算は大変だが安定性は良く、k も割と長くとれるので、先の t に対して計算する場合は、全体で考えると陽的差分よりも計算量が少なくてすむ可能性がある。

実際に、陰的差分を考えてみる。

$$\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k}+f'(u(x,t))\frac{u(x+h,t+k)-u(x-h,t+k)}{2h}=0 \tag{3.59}$$

式 (3.59) は未知数に対して線形になっているので、解くことは可能である。漸化式で書くと、

$$-f'(u_j^n)\frac{k}{2h}u_{j-1}^{n+1}+u_j^{n+1}+f'(u_j^n)\frac{k}{2h}u_{j+1}^{n+1}=u_j^n \tag{3.60}$$

であるので

$$\begin{cases} Lh=1, \quad x_j=jh, \quad t_n=nk \\ u_j^n=u(x_j,t_n) \end{cases} \tag{3.61}$$

に対して

$$\begin{cases} -\alpha_0^n u_{-1}^{n+1} + u_0^{n+1} + \alpha_0^n u_1^{n+1} = u_0^n \\ -\alpha_1^n u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + \alpha_1^n u_2^{n+1} = u_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \left(\alpha_j^n = f'(u_j^n)\frac{k}{2h}\right) \\ -\alpha_{L-2}^n u_{L-3}^{n+1} + u_{L-2}^{n+1} + \alpha_{L-2}^n u_{L-1}^{n+1} = u_{L-2}^n \\ -\alpha_{L-1}^n u_{L-2}^{n+1} + u_{L-1}^{n+1} + \alpha_{L-1}^n u_L^{n+1} = u_{L-1}^n \end{cases} \tag{3.62}$$

という方程式を解くことになる。$u_L^{n+1} = u_0^{n+1}, u_{-1}^{n+1} = u_{L-1}^{n+1}$ に注意し、これを行列で書くと

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_0^n & 0 & 0 & \dots & -\alpha_0^n \\ -\alpha_1^n & 1 & \alpha_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2^n & 1 & \alpha_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha_{L-2}^n & 1 & \alpha_{L-2}^n \\ \alpha_{L-1}^n & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{L-1}^n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{L-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{L-1}^n \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

となる。係数行列のうち、対角成分の上下一列ずつと右上角、左下角以外の成分は全て 0 である。

式 (3.62) において、$L = 3$ と $L = 4$ のときについてこの連立方程式の係数行列の行列式を計算してみると

L=3 のときの行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0^n & -\alpha_0^n \\ -\alpha_1^n & 1 & \alpha_1^n \\ \alpha_2^n & -\alpha_2^n & 1 \end{vmatrix} &= 1 + \alpha_0^n\alpha_1^n\alpha_2^n - \alpha_0^n\alpha_1^n\alpha_2^n + \alpha_0^n\alpha_2^n + \alpha_0^n\alpha_1^n + \alpha_1^n\alpha_2^n \\ &= 1 + \alpha_0^n\alpha_2^n + \alpha_0^n\alpha_1^n + \alpha_1^n\alpha_2^n \end{aligned} \tag{3.64}$$

L=4 のときの行列式

$$
\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0^n & 0 & -\alpha_0^n \\ -\alpha_1^n & 1 & \alpha_1^n & 0 \\ 0 & -\alpha_2^n & 1 & \alpha_2^n \\ \alpha_3^n & 0 & -\alpha_3^n & 1 \end{vmatrix}
= 1\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^n & 0 \\ -\alpha_2^n & 1 & \alpha_2^n \\ 0 & -\alpha_3^n & 1 \end{vmatrix} - \alpha_0^n \begin{vmatrix} -\alpha_1^n & \alpha_1^n & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2^n \\ \alpha_3^n & -\alpha_3^n & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
+0\begin{vmatrix} -\alpha_1^n & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2^n & \alpha_2^n \\ \alpha_3^n & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-\alpha_0^n) \begin{vmatrix} -\alpha_1^n & 1 & \alpha_1^n \\ 0 & -\alpha_2^n & 1 \\ \alpha_3^n & 0 & -\alpha_3^n \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1(1+\alpha_2^n\alpha_3^n+\alpha_1^n\alpha_2^n) - \alpha_0^n(-\alpha_1^n+\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n-\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n) \\
&\quad +0+\alpha_0^n(-\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n+\alpha_3^n+\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n) \\
&= 1+\alpha_2^n\alpha_3^n+\alpha_1^n\alpha_2^n+\alpha_0^n\alpha_1^n+\alpha_0^n\alpha_3^n \qquad (3.65)
\end{aligned}
$$

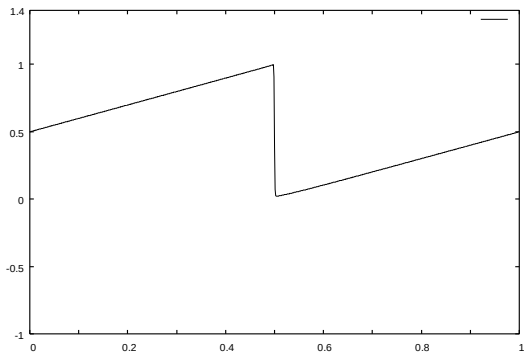
となる。ここで気をつけなければいけないのが、連立方程式 (3.63) を解くためには、行列式 $\neq 0$ という条件が必要であることである。そうでないと逆行列を持たないからであるが、一方非線形の方程式の場合、$\alpha_j^n = \dfrac{k}{2h}f'(u_j^n)$ は u_j^n の値によって変わるので、式 (3.64)、式 (3.65) の逆行列の値が 0 にならないためには $|\alpha_j^n| \ll 1$ のような条件が必要になる。しかし、$|\dfrac{k}{2h}f'(u_j^n)| \ll 1$ という条件は Lax-Friedrichs 法の場合と同等であるから、連立方程式を解く分、陰的差分のほうが手間がかかることになる。結局、陰的差分は使えないということになる。

4　数値計算結果および考察

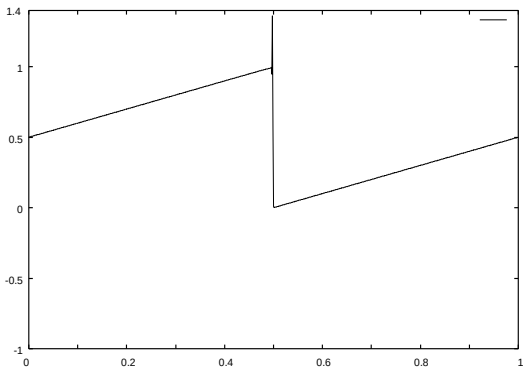
ここでは、3 章で紹介してきた Lax-Friedrichs 法、Lax-Wendroff 法を実際数値計算してみた結果を考察していく。

4.1　外力なしの数値計算結果と考察

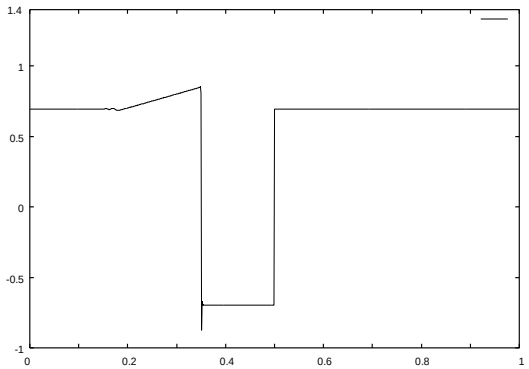
まず、外力をつけず、$t = 1$、分割数を 1000 とし、非粘性バーガース方程式 (3.2) に対して、Lax-Friedrichs 法、Richtmyer 法、MacCormack 法 (前進差分) と MacCormack 法 (後退差分) の 4 つの数値計算を行った結果が図 4.1 である。



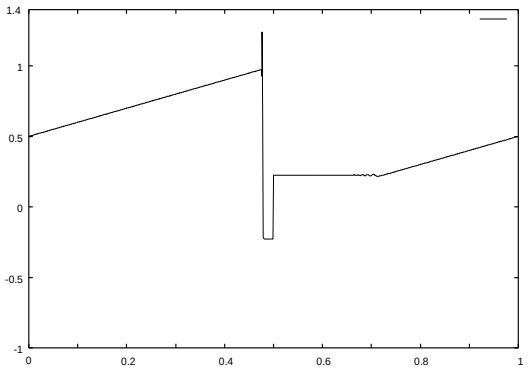
(a) Lax-Friedrichs 法



(b) Richtmyer 法



(c) MacCormack 法 (前進差分)



(d) MacCormack 法 (後退差分)

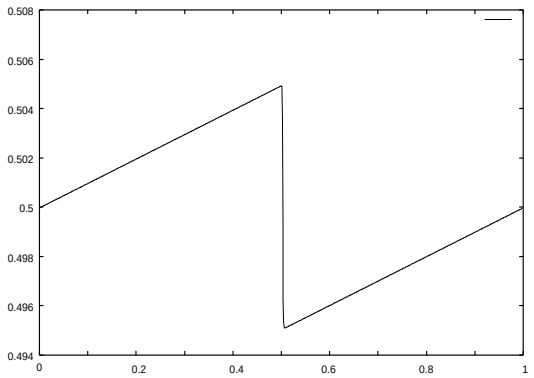
Fig. 4.1　t=1 1000 分割

1000 分割ぐらいでは、やはり一次精度の Lax-Friedrichs 法よりは、二次精度の Richtmyer 法や MacCormack 法 (前進差分)、MacCormack 法 (後退差分) の方が精度のいいグラフが

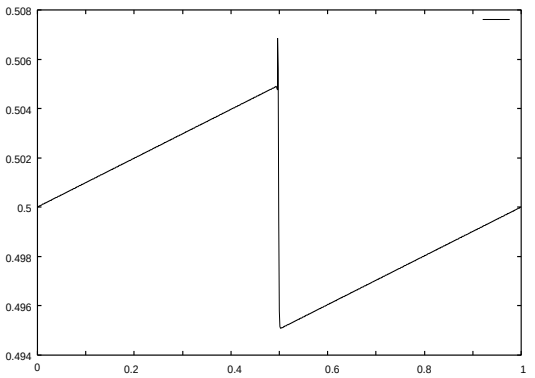
でると予想されたが、図 4.1 を見てもわかるように、むしろ Lax-Friedrichs 法のグラフのほうが綺麗で、二次精度である、Richtmyer 法と MacCormack(後退差分) は、衝撃波の前後で振動が見られる。この段階では、二次精度で使えそうな方法は、Richtmyer 法ぐらいであると予想される。

また、MacCormack 法 (前進差分) の結果においては、他のグラフと形が全く異なることから、本研究では使えなさそうに見える。これについては、MacCormack 法は方向非対称性があり、バーガース方程式などの単独の保存則方程式のような方向対称性をもたないものには使えなく、精度のいい差分にはならないということが考えられる。

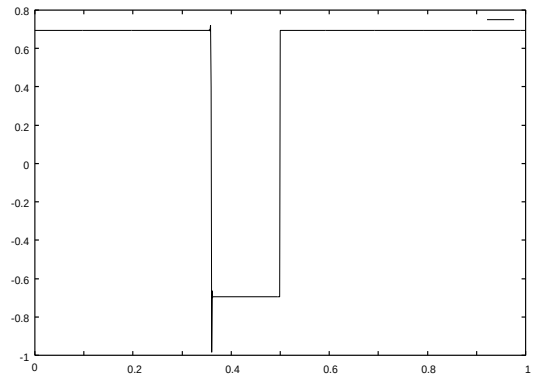
さらに、同じ 1000 分割で大きな時間幅 $t = 101$ をもたせ、数値計算した結果が図 4.2 である。ここで、Lax-Friedrichs 法、Richtmyer 法、MacCormack 法 (前進差分) のグラフ



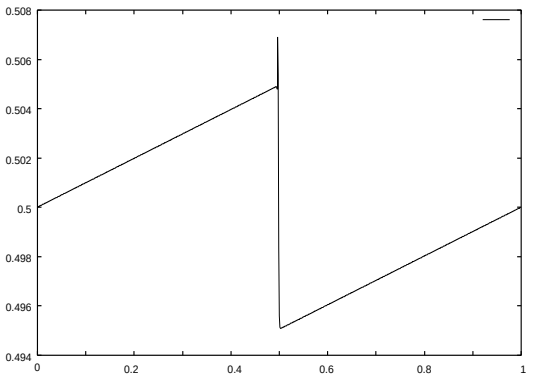
(a) Lax-Friedrichs 法



(b) Richtmyer 法



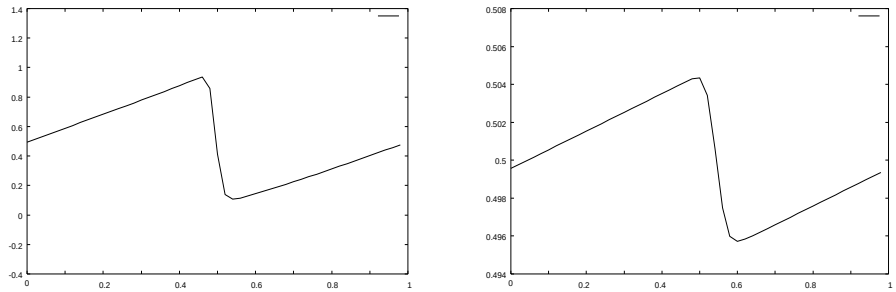
(c) MacCormack 法 (前進差分)



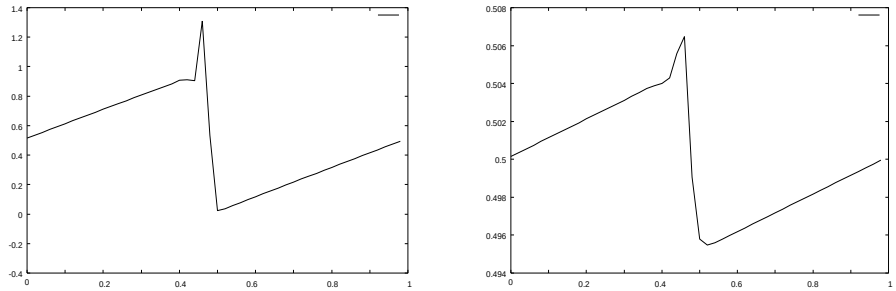
(d) MacCormack 法 (後退差分)

Fig. 4.2 t=101 1000 分割

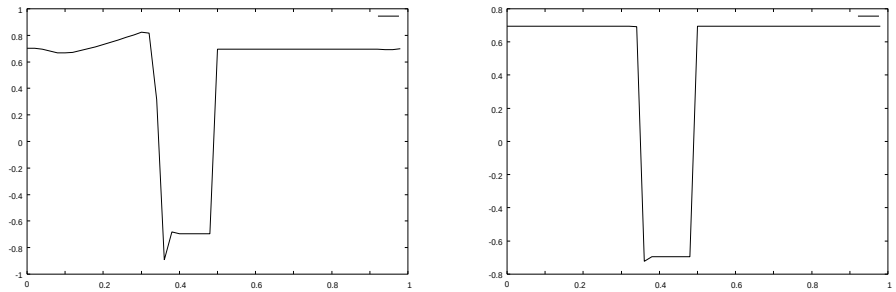
の形にはあまり変化は見られないが、MacCormack 法 (後退差分) のグラフに注目すると、Lax-Friedrichs 法や Richtmyer 法の形に似てきていることがわかる。



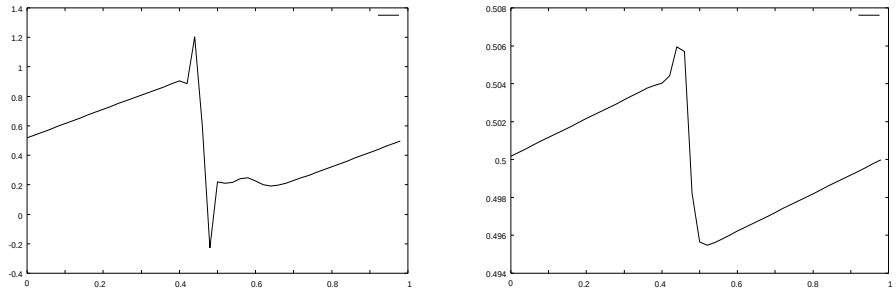
(a) Lax-Friedrichs 法 t=1　(b) Lax-Friedrichs 法 t=101



(c) Richtmyer 法 t=1　(d) Richtmyer 法 t=101



(e) MacCormack 法 (前進差分) t=1　(f) MacCormack 法 (前進差分) t=101



(g) MacCormack 法 (後退差分) t=1　(h) MacCormack 法 (後退差分) t=101

Fig. 4.3　50 分割

これの分割数を粗くして計算した結果が図 4.3 である。これを見ても MacCormack 法 (後退差分) のグラフは Lax-Friedrichs 法や Richtmyer 法のグラフと似ていることがわかる。このことから MacCormack 法 (後退差分) は、短時間では使えないが、長時間では

使えそうである。それは、50 分割にするとよくわかるが、衝撃波の傾きが Richtmyer 法や MacCormack 法 (後退差分) の方が、Lax-Friedrichs 法よりも急であることから、Lax-Friedrichs 法よりむしろよく、Richtmyer 法程度に使えそうである。

4.2 外力を付け加えた数値計算結果と考察

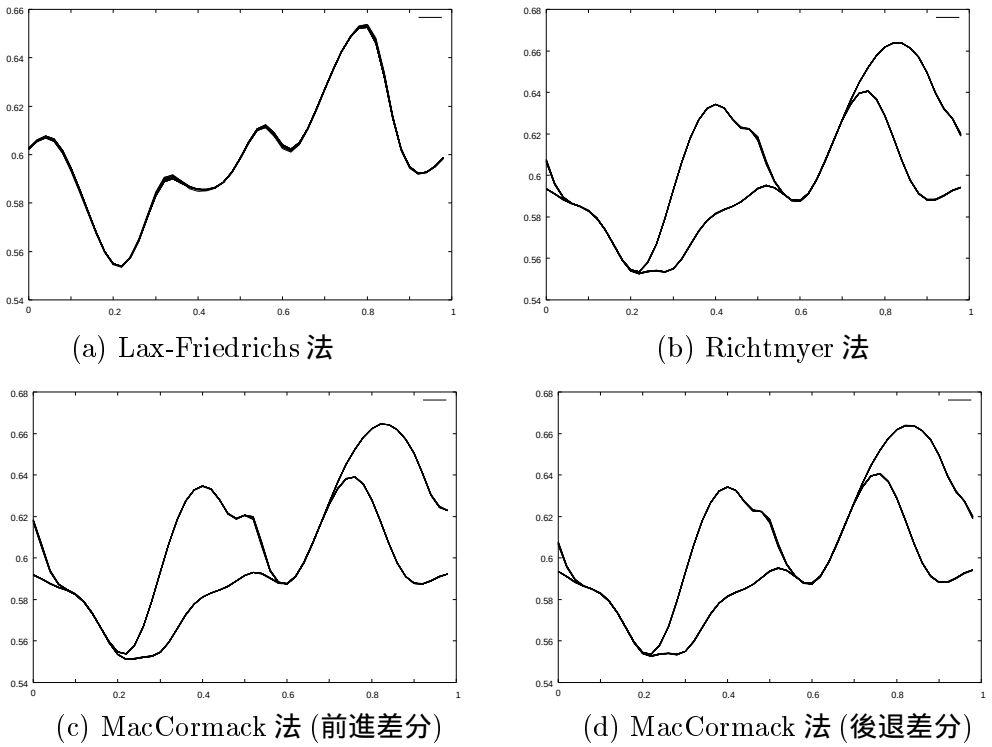
今度は、非粘性バーガース方程式 (3.2) に時間周期外力 $g(t,x)$ をつけて数値計算を行ってみる。計算結果の得られている周期解に対して、一次精度と二次精度の差分を比較する。

外力は周期が T であるような次のような関数にする。

$$g(t,x) = A\sin\Big(\frac{2\pi t}{T}\Big)h(x;a,N) = \begin{cases} \sin^2\Big(\dfrac{N\pi x}{a}\Big) & (0 < a \leq x) \\ 0 & (x < a \leq 1) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$(0 < a < 1, A > 0, N = 1, 2, \cdots)$$

分割数は 50 分割と粗く、$T = 0.8$ とし、$300 \sim 330$ 周期まで $(300T, 301T, ..., 330T)$ のグラフを重ねて書いた結果が図 4.4 である。



(a) Lax-Friedrichs 法　(b) Richtmyer 法

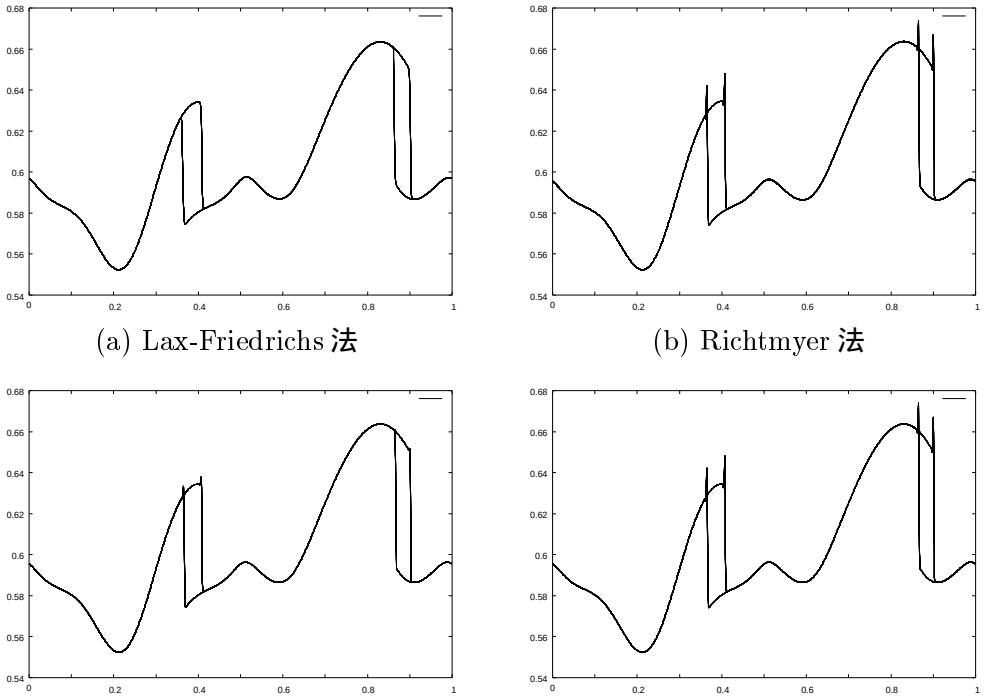
(c) MacCormack 法 (前進差分)　(d) MacCormack 法 (後退差分)

Fig. 4.4 外力つき 50 分割

図を見て分かるように、はっきりと一次精度と二次精度の差がでていることが分かる。Lax-Friedrichs 法のグラフでは周期解が分れていないが、Richtmyer 法や MacCormack 法

(前進差分)、MacCormack 法 (後退差分) などの二次精度の差分においてははっきりとグラフが分れていることがわかる。

また、注目すべき点は MacCormack 法 (前進差分) が、なぜかこの場合には Richtmyer 法や MacCormack 法 (後退差分) と同様のグラフになっていて、周期解問題の場合には使えそうであるということである。これは分割数を増やした 1000 分割の場合でもいえる。



(a) Lax-Friedrichs 法　(b) Richtmyer 法

(c) MacCormack 法 (前進差分)　(d) MacCormack 法 (後退差分)

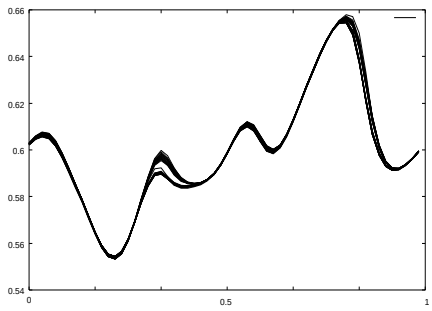
Fig. 4.5 外力つき 1000 分割

まだ、はっきりとは言えないが、外力をつけたものであるならば、MacCormack 法 (前進差分) も案外使えるかもしれないということもいえそうである。

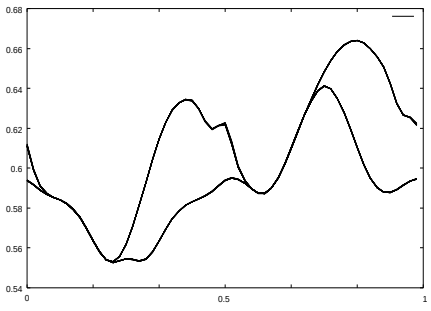
1000 分割になると周期解の 2 倍性がはっきりと解り、グラフの形も一次精度と二次精度の間にはあまり差が見られない。

図 4.6、図 4.7、図 4.8 は 50 分割から先の 60 分割、70 分割、80 分割、90 分割、100 分割を計算した結果である。

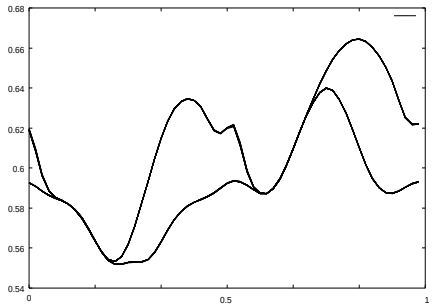
Lax-Friedrichs 法は 70 分割のあたりでようやく 2 倍周期解であることが判別できる。それに比べ、二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法 (前進差分)、MacCormack 法 (後退差分) は、衝撃波の形を比較してみてもわかるが、Lax-Friedrichs 法よりもずっと速く 1000 分割のグラフ図 4.5 に近付いてきている。そして、この例では MacCormack 法 (前進差分) がむしろ衝撃波前後での振動も少なく、よい結果を出しているように見える。これは、外力のない結果からするとかなり予想外の結果である。



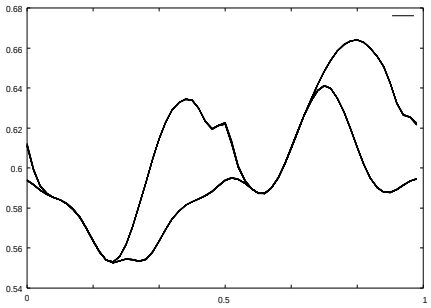
(a) Lax-Friedrichs 法 60 分割



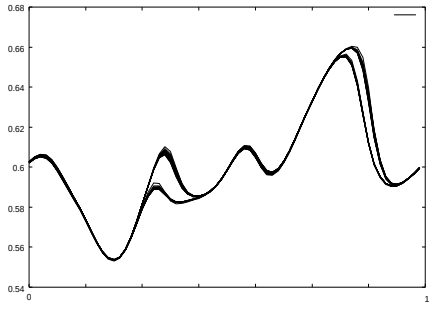
(b) Richtmyer 法 60 分割



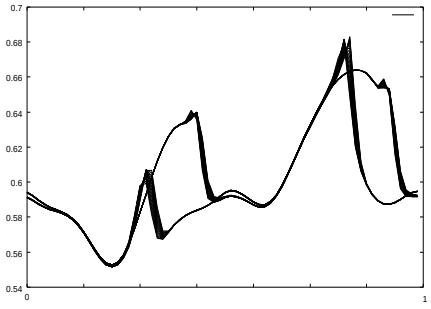
(c) MacCormack 法 (前進差分) 60 分割



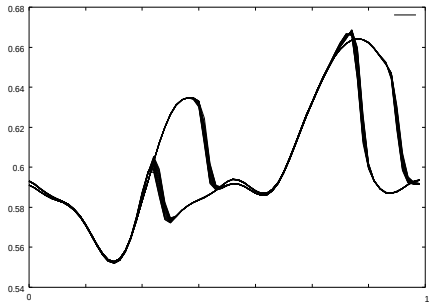
(d) MacCormack 法 (後退差分) 60 分割



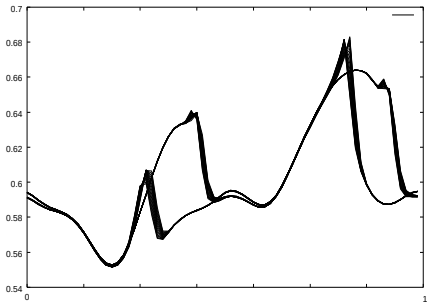
(e) Lax-Friedrichs 法 70 分割



(f) Richtmyer 法 70 分割

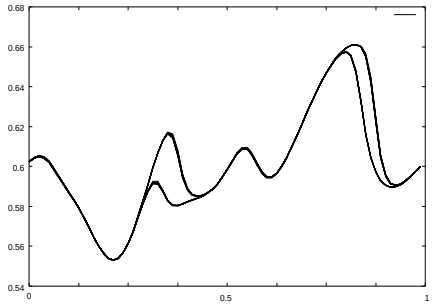


(g) MacCormack 法 (前進差分) 70 分割

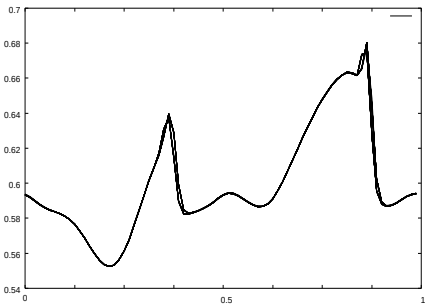


(g) MacCormack 法 (後退差分) 70 分割

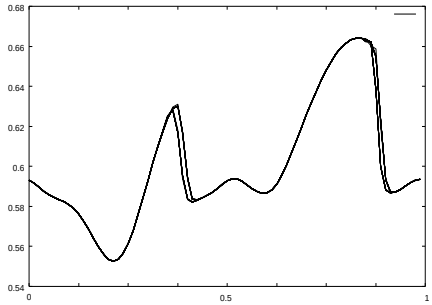
Fig. 4.6 外力つき 60 分割と 70 分割



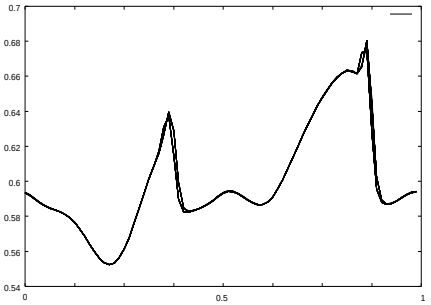
(a) Lax-Friedrichs 法 80 分割



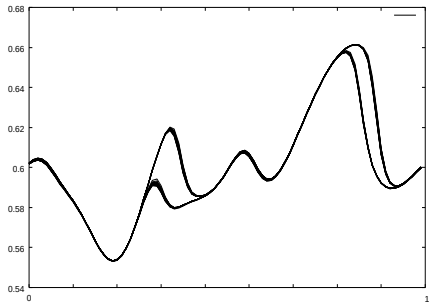
(b) Richtmyer 法 80 分割



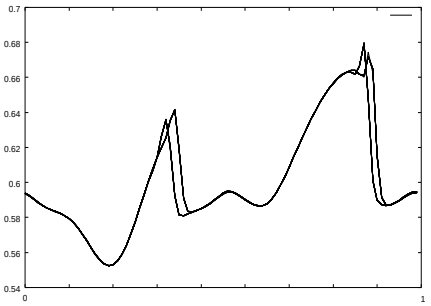
(c) MacCormack 法 (前進差分) 80 分割



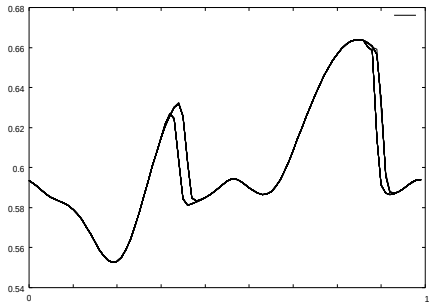
(d) MacCormack 法 (後退差分) 80 分割



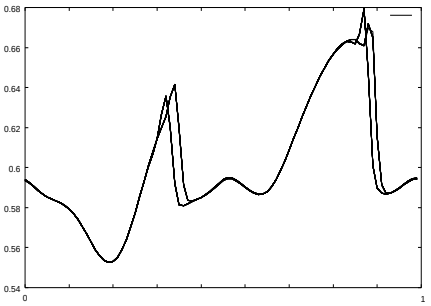
(e) Lax-Friedrichs 法 90 分割



(f) Richtmyer 法 90 分割

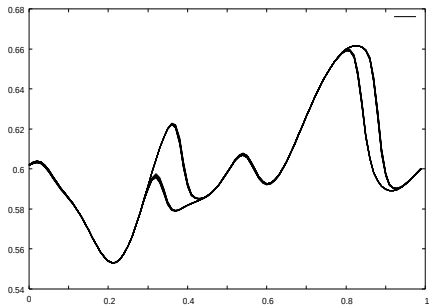


(g) MacCormack 法 (前進差分) 90 分割

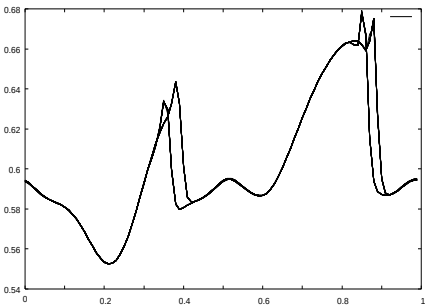


(h) MacCormack 法 (後退差分) 90 分割

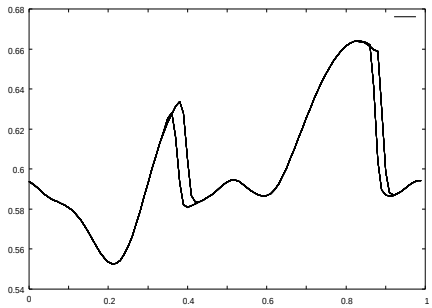
Fig. 4.7 外力つき 80 分割と 90 分割



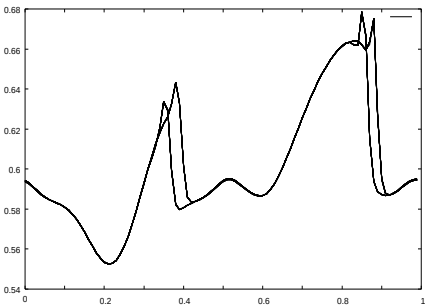
(a) Lax-Friedrichs 法 100 分割



(b) Richtmyer 法 100 分割



(c) MacCormack 法 (前進差分) 100 分割



(d) MacCormack 法 (後退差分) 100 分割

Fig. 4.8 外力つき 100 分割

5　あとがき

本研究は、非粘性バーガース方程式について様々な差分近似をとる方針で進めてきた。差分法は、Lax-Friedrichs 法、Lax-Wendroff 法として Richtmyer 法、MacCormack 法 (前進差分) と MacCormack 法 (後退差分) の 4 種類について行った。どんな差分法を使って数値計算結果を出すか、考えていた当初は、安定性が非常に良い陰的差分が、本研究の最大の目的である長時間後の差分近似には一番良いと考えていたが、本稿の 3.4 節で述べたようにあまり良くないということが解った。

また、一次精度と二次精度ではやはり差があり、図 4.4 ではっきりと表れたが、50 分割というかなり粗い h でも二次精度では 2 倍周期が確認できそうであることがわかった。

MacCormack 法については、本研究で扱った非粘性のバーガース方程式などの単独の保存則方程式には使えないように思えたが、MacCormack 法 (後退差分) は本研究の目的である長時間後の数値計算では良い結果を出した。また、MacCormack 法 (前進差分) においては、外力をつけなかった場合には、まったく使えなさそうであったにもかかわらず、外力をつけて数値計算を行ったところ他の二次精度の差分の結果とあまり変わらなく、むしろ振動が少ない良い結果という大変興味深い現象を出した。

結果としては、外力をつけない場合であるならば、Richtmyer 法、MacCormack 法 (後退差分) が、長時間後の数値計算結果を見るのには適していると思われる。また、外力をつけた場合を考えると、二次精度の差分の方が一次精度の差分よりも早く倍周期解を判断することができるようである。

本来であるならば、MacCormack 法の性質をもっと深く調べ、なぜ、外力付であると他の差分法よりも良い結果を出したのか理由を追求しなければいけないところであるが、本稿には間に合わなかった。

今後の課題としては、MacCormack 法の性質をより詳しく調べること、昨年の研究にある周期解の自動判別法 [3] を適用するのに適しているものがどれであるかを調べてみることなどがあげられる。

謝辞

本研究を行うにあたり、貴重な御指導、御助言を賜わりました、当大学竹野茂治助教授をはじめ、研究室の学友諸氏には本稿執筆に関してまでも御協力頂いたことを、心より感謝いたします。

参考文献

[1] 竹野 茂治 : “単独保存則方程式の数値解析”, (新潟工科大学紀要,1997)

[2] 新田 哲也 : “気体力学方程式の高精度差分法による数値解析”, 新潟大学工学部卒業論文 , (1995)

[3] 大川戸 太郎 : “周期的外力を持つ非粘性バーガース方程式の倍周期解の自動判別”, 新潟工科大学工学部卒業論文 , (1998)

[4] 河村 哲也 : “工系数学講座 10 応用偏微分方程式”, (共立出版株式会社,1998)

[5] 野木 達夫, 山口 昌哉 : “数値解析の基礎”, (共立出版株式会社,1969)

[6] 戸川 隼人 : “微分方程式の数値計算”, (オーム社,1968)

[7] 河村 哲也 : “理工系数学のキーポイント・10 キーポイント偏微分方程式”, (岩波書店,1997)

[8] 日本機械学会 編 : “コンピュータアナリシスシリーズ 4 流れの数値シュミレーション”, (コロナ社,1988)

[9] 田辺 行人, 高見穎郎監修 / 高見 穎郎, 河村 哲也著 : “偏微分方程式の差分解法”, (東京大学出版会,1994)

[10] 山口 昌哉, 野木 達夫 : “数値解析の基礎”, (共立出版株式会社,1969)

[11] 竹野 茂治 : “単独保存則方程式の周期境界値問題”, (1999)

[12] 矢嶋 信男, 野木 達夫 : “発展方程式の数値解析”, (岩波書店,1977)